

ANALISIS DE FALLAS EN SISTEMAS ELECTRICOS

3. ANALISIS DE FALLAS EN SISTEMAS DE POTENCIA.

3.1. INTRODUCCION.

Aunque los sistemas sean diseñados tomando en cuenta las normas para tal efecto, un sistema 100% infalible es imposible de diseñar y construir, pues además de la imposibilidad natural para obtener un producto perfecto, tampoco es adecuado hacerlo, desde el punto de vista económico, por lo que cualquier sistema eléctrico está expuesto a las contingencias asociadas con las fallas en su operación. Además el envejecimiento natural de los componentes de dichos sistemas, es una de las causas naturales de la presencia de fallas en los sistemas. Por otro lado existen fenómenos de carácter aleatorio y debido a la naturaleza, que también son causa muy frecuente de dichos problemas.

3.1.1. APLICACIONES DEL PROBLEMA DE FALLAS.

Debido a lo mencionado en el párrafo anterior, es obvio pensar que la única forma de enfrentar dichos fenómenos, es a través de sistemas de protección. Esta última es una de las aplicaciones principales del análisis de fallas. El sistema de protección lo forman una parte, que podríamos decir es la parte “inteligente” del sistema de protección, y que está compuesta por todos los instrumentos de transformación, TP’s y TC’s por ejemplo, y además por los instrumentos de medición y, por supuesto por los relés de protección, que son los instrumentos principales de este conjunto de componentes. Sin embargo esta parte es la encargada de enviar las ordenes pertinentes al sistema que actuará para liberar la falla; esta otra parte, la parte actuante por decirlo de alguna manera, la conforman otro conjunto de elementos, de los cuales el más importante es el interruptor de potencia.

El análisis de fallas proporciona la cuantificación de ajustes y capacidades requeridas por el sistema de protección, para hacer su trabajo en forma correcta. En el caso de los relés ó relevadores, como prefieren algunos nombrarlos, se requiere ajustarlos a los valores en que deben operar, con el fin de que no operen en situaciones en que no lo deben hacer; lo anterior está asociado con lo que se denomina *coordinación de protecciones*, que consiste en la determinación de los ajustes precisos de los relevadores, con el fin de que estos operen aislando la parte justamente necesaria para eliminar la falla, y evitar de esta

manera el dejar sin servicio de manera innecesaria partes del sistema. Por otro lado existe la necesidad de determinar la capacidad de los interruptores. Esto último es importante hacerlo en función de obtener una operación de éstos correcta, pues de no poseer la capacidad necesaria el efecto puede ser catastrófico e implicar pérdidas materiales y humanas.

Ambas tareas arriba mencionadas requieren de un conocimiento preciso de los valores asociados con las fallas, que pueden ocurrir en el sistema, dichos valores son obtenidos a través un estudio de fallas del sistema.

Existen más aplicaciones del análisis de fallas, pero con el objeto de no hacer voluminoso de manera innecesaria este material, exponemos únicamente el caso de protección de los sistemas eléctricos, que es, sino la más importante, una de las aplicaciones más importantes de dicho estudio.

3.1.2. FALLA TRIFASICA.

Los estudios de falla son estudios efectuados en el sistema de potencia, en los cuales los niveles de corriente de falla, capacidad de corto circuito (producto del voltaje de prefalla por la corriente de falla) y los voltajes de postfalla, son calculados.

El fenómeno asociado con la ocurrencia de una falla, es sin duda uno de carácter dinámico. Sin embargo, debido a las variables de interés y a que se requieren efectuar una gran cantidad de análisis de fallas, este fenómeno se analiza en régimen permanente ó estado estable senoidal.

La formulación del análisis de fallas en estado estable senoidal, se comprende si analizamos el comportamiento de la principal fuente de la corriente de corto circuito en el sistema de potencia, el generador síncrono. Como una primera aproximación pensemos en un modelo simple del generador síncrono, consistente en una fuente de voltaje de valor $e(t) = E_{\max} \sin(\omega t + \alpha)$, en serie con los parámetros R y L . El ángulo α determina el punto en la onda de voltaje en el cual ocurre la falla. Lo anterior se muestra en la figura 3.1.

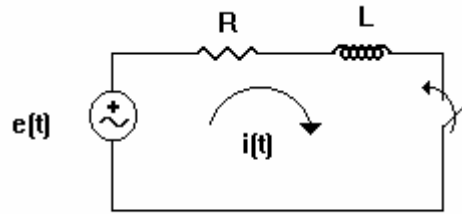


Figura 3.1. Respuesta de circuito RL debido a excitación senoidal.

Planteando la ecuación del circuito de la figura anterior, obtenemos la ecuación diferencial

$$L \frac{di}{dt} + Ri = E_{\max} \sin(\omega t + \alpha)$$

La solución de la ecuación anterior es

$$i(t) = \frac{E_{\max}}{Z} \left[\sin(\omega t + \alpha - \theta) - \sin(\alpha - \theta) e^{-\frac{R}{L}t} \right].$$

Esta ecuación está formada por dos términos: uno de carácter unidireccional y que se denomina *componente transitoria de CD*; el otro constituye la respuesta en *estado estable*, y es el término que queda después de transcurrido suficiente tiempo, que garantice que la componente unidireccional se ha desvanecido. Es importante notar que la componente corriente transitoria dependerá en un alto grado del ángulo α de la onda de voltaje en $t = 0$.

El término transitorio de CD ó componente unidireccional siempre existirá en general. El valor más crítico de la corriente de corto circuito, estará asociada con un valor del argumento del término senoidal de esta componente unidireccional igual a $(\alpha - \theta) = -\pi/2$. El caso contrario, es decir aquel en el que dicha componente unidireccional no existe, está asociado con el hecho de que $\alpha = \theta$ en $t = 0$ ⁽¹⁾.

El modelo simple usado arriba adolece de la consideración de que L es constante, lo cual no es cierto en el generador. La siguiente figura muestra un oscilograma

de la corriente en una fase del generador síncrono bajo corto circuito, en el cual se ha eliminado la componente unidireccional haciendo $\alpha=\theta$ para dicha fase.

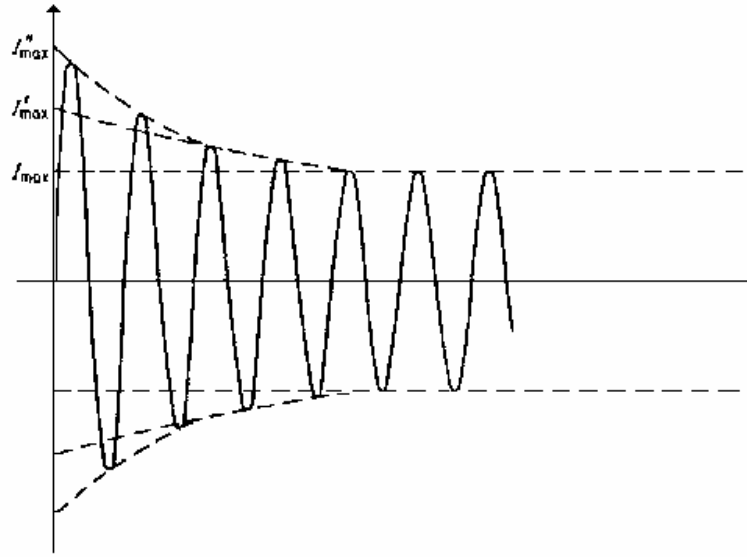


Figura 3.2. Corriente de corto circuito.

De la figura anterior vemos claramente que el comportamiento del generador muestra un alto valor de corriente, que tiende a disminuir como se muestra. Claramente se pueden distinguir tres periodos. Uno asociado con el valor más grande de corriente I'' y que se denomina *periodo transitorio*. El segundo periodo está asociado con la corriente I' y se denomina *periodo transitorio*. El tercer periodo está asociado con la corriente I , y se denomina *periodo en estado estable*. Además las corrientes asociadas con estos periodos se denominan corriente subtransitoria, transitoria y de estado estable, existiendo sendas reactancias asociadas con estas corrientes y que se denominan: x_d'' , x_d' , x_d y cuyos nombres son reactancia subtransitoria, transitoria y de estado estable, respectivamente. Si $E_{\max}$ es el voltaje en vacío de línea a neutro de la máquina, cuyo eficaz (ó rms) será llamado E_g , entonces:

$$x_d'' = \frac{E_{\max}}{I''_{\max}}$$

$$x_d' = \frac{E_{\max}}{I'_{\max}}$$

$$x_d = \frac{E_{\max}}{I_{\max}}$$

Es obvio que $x''_d < x'_d < x_d$. Los valores de las corrientes subtransitoria, transitoria y de estado estable se definen $I'' = \frac{E_g}{x''_d}$, $I' = \frac{E_g}{x'_d}$, $I = \frac{E_g}{x_d}$.

ANALISIS DE CORTO CIRCUITO SIMETRICO.

Para introducirnos en el tema, supongamos que ocurre una falla trifásica a tierra en el bus 3 del sistema de potencia mostrado.

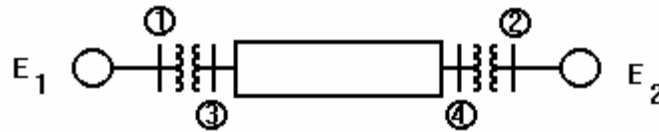


Figura 3.3. Sistema de potencia.

La falla puede simularse mediante el cierre del interruptor mostrado en el circuito equivalente por fase que se muestra

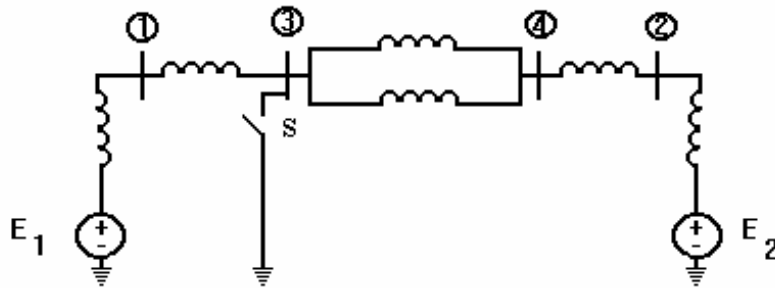


Figura 3.4. Circuito equivalente para falla en bus 3.

En la medida en que el interruptor s permanezca abierto, las condiciones normales de operación prevalecen, y un voltaje de pre-falla V_3^0 aparece a través del interruptor.

El cierre del interruptor trae consigo cambios en corrientes y voltajes en el sistema que pueden ser evaluados usando el teorema de Thévenin. La aplicación de dicho teorema nos conduce al circuito que se muestra a continuación

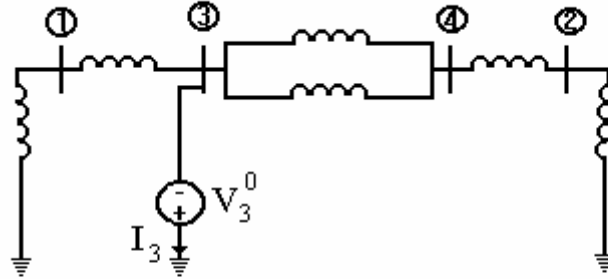


Figura 3.5. Circuito resultante de aplicar superposición.

En el circuito equivalente anterior, las fuentes de voltaje E_1 y E_2 se han cortocircuitado y la red se energiza mediante un voltaje equivalente conectado entre el bus 3 y referencia, V_3^0 , el cual representa el voltaje en circuito abierto visto desde dicho bus y referencia y al cual se denomina voltaje de prefalla. Los cambios de corriente y voltajes pueden ser calculados.

Los valores de corrientes y voltajes durante la condición de postfalla, se pueden obtener superponiendo los cambios de corrientes y voltajes mencionados arriba, con los valores de prefalla. Esto en forma de ecuación puede escribirse como:

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}^0 + \Delta \mathbf{V} \quad (3.13)$$

Donde

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{pmatrix}, \mathbf{V}^0 = \begin{pmatrix} V_1^0 \\ V_2^0 \\ V_3^0 \\ V_4^0 \end{pmatrix}, \Delta \mathbf{V} = \begin{pmatrix} \Delta V_1 \\ \Delta V_2 \\ \Delta V_3 \\ \Delta V_4 \end{pmatrix}.$$

El superíndice 0 indica valores de prefalla.

Es obvio que los cambios de voltaje de bus han ocurrido debido a la inyección de corriente de falla I_3 en el bus 3. Podemos definir por tanto, el vector de corrientes de falla de la siguiente forma

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ I_3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De lo anterior se tiene que

$$\Delta \tilde{\mathbf{V}} = \mathbf{Z} \tilde{\mathbf{I}} \quad (3.14)$$

donde $\mathbf{Z}$ es la matriz de impedancias de bus (ó nodal), que se obtendrá más adelante. Se puede adelantar que los elementos diagonales de $\mathbf{Z}$ representan las denominadas impedancias de punto impulsor (driving point) en circuito abierto, y que representan las impedancias equivalentes de Thévenin de cada bus; mientras que los elementos fuera de la diagonal representan los equivalentes vistos entre los nodos asociados con su posición y se denominan impedancias de transferencia en circuito abierto. Por lo tanto la corriente de falla causa los siguientes cambios en los voltajes de bus:

$$\begin{aligned} \Delta V_1 &= Z_{31} I_3 \\ \Delta V_2 &= Z_{32} I_3 \\ \Delta V_3 &= Z_{33} I_3 \\ \Delta V_4 &= Z_{34} I_3 \end{aligned}$$

Si la falla es sólida, esto es, no existe impedancia en la trayectoria de falla, entonces $V_3 = 0$ y esto significa que $V_3^0 = -\Delta V_3$, es decir, $V_3^0 = -Z_{33} I_3$ de donde tenemos que

$$I_3 = -\frac{V_3^0}{Z_{33}} \quad (3.15a)$$

En caso de existir una impedancia de falla z_f , entonces

$$I_3 = -\frac{V_3^0}{Z_{33} + z_f} \quad (3.15b)$$

Conociendo I_3 se puede resolver la ecuación (3.1), que nos proporciona los valores de postfalla de los voltajes de bus. De aquí las corrientes de postfalla a través de líneas ó transformadores pueden determinarse.

Para el caso de 4 buses que hemos usado para ejemplificar, podemos generalizar para n buses, considerando que la falla ha ocurrido en el bus q .

Para falla sólida

$$\begin{aligned} I_q &= -\frac{V_q^0}{Z_{qq}} \\ V_q &= 0 \\ V_i &= V_i^0 + Z_{iq} I_q \quad i \neq q \end{aligned} \quad (3.16a)$$

para falla a través de z_f :

$$\begin{aligned} I_q &= -\frac{V_q^0}{Z_{qq} + z_f} \\ V_q &= z_f I_q \\ V_i &= V_i^0 + Z_{iq} I_q \quad i \neq q \end{aligned} \quad (3.16b)$$

Las corrientes de postfalla a través de líneas ó transformadores conectados entre los buses i y j es dada por

$$I_{ij} = \frac{V_i - V_j}{z_{ij}} \quad (3.17)$$

donde z_{ij} es la impedancia del transformador.

CAPACIDAD DE CORTO CIRCUITO.

La *capacidad de corto circuito* de un bus (también llamada *nivel de falla*) CCC , se define como el producto de las magnitudes del voltaje de prefalla y la corriente de falla. Si el voltaje y la corriente se expresan en pu, la CCC también estará dada en pu. La CCC tiene su valor más alto en el caso de la falla trifásica simétrica. Tiene los siguientes usos:

1. Proporciona cuantitativamente los esfuerzos a los cuales estará sujeto un interruptor y que posteriormente deberá interrumpir. Un interruptor no solo deberá interrumpir la corriente de falla, sino también desarrollar suficiente rigidez de aislamiento para soportar el voltaje de recuperación, que se desarrolla a través de los polos del interruptor durante su separación. Lo anterior implica que el interruptor deberá interrumpir la corriente de falla y también soportar el voltaje de sistema completo a través de sus contactos separados, y el producto de estas dos cantidades es obviamente la CCC en el punto de localización del interruptor. La CCC debida a falla trifásica simétrica, proporciona (los datos nominales) la capacidad del interruptor.
2. En el análisis de los sistemas: corto circuito, flujos de carga, estabilidad , etc., puede no ser necesario representar detalladamente una porción del sistema, p.ej. un área remota al punto de interés. Como por definición

$$CCC = V^0 I_f \quad (3.18)$$

la CCC será numéricamente igual a la corriente de falla, si V^0 se supone de 1 pu. De la ecuación (4a), si $V_q^0 = 1$ pu ,

$$Z_{qq} = \frac{1}{CCC} \quad (3.19)$$

Lo anterior implica que el reciproco de la CCC de un bus, nos proporciona la impedancia equivalente de Thévenin de ese bus.

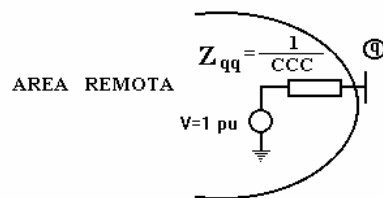


Figura 3.6. Capacidad de corto circuito de un bus.

COMPONENTES SIMÉTRICAS

La transformación de componentes simétricas fue planteada por primera vez por Fortescue a principios del presente siglo. En su planteamiento original Fortescue no recurrió a las ideas del álgebra lineal, a las cuales nosotros recurriremos más adelante. Estos principios matemáticos son el fundamento no solo de las componentes simétricas, sino de todas las transformaciones conocidas.

Consideremos una red trifásica balanceada con matrices de impedancia y admitancia $\mathbf{Z}_{\text{bus}}$ y $\mathbf{Y}_{\text{bus}}$. Estas matrices tienen n columnas y renglones. Si cada elemento de esas matrices, Y_{ij} por ejemplo, se examina en detalle, el bus i puede ser reconocido como un circuito de tres nodos correspondiente a las tres fases. De manera similar, el bus j puede ser referido como un circuito de tres nodos. De esta forma Y_{ij} , un elemento de $\mathbf{Y}_{\text{bus}}$, puede ser referido como una submatriz de 3×3 , $\mathbf{Y}_{ij}^{3\phi}$, correspondiente a la matriz $(3n \times 3n)$, $\mathbf{Y}_{\text{bus}}^{3\phi}$. Para una red de transmisión balanceada, cada submatriz de $\mathbf{Y}_{\text{bus}}^{3\phi}$ y $\mathbf{Z}_{\text{bus}}^{3\phi}$ es de la forma

$$D = \begin{pmatrix} s & m & m \\ m & s & m \\ m & m & s \end{pmatrix}$$

Los valores característicos de esta matriz D se pueden encontrar de

$$\det(D - \lambda I) = 0 \quad (3.20)$$

La ecuación anterior conduce a la denominada ecuación característica de D y se puede encontrar que es un polinomio cúbico de la forma

$$-\lambda^3 + s\lambda^2 + \lambda(-3s^2 + 2m^2) + s^3 - 2m^2s + 2m^3 = 0$$

Las raíces de este polinomio son

$$\lambda = s - m$$

$$\lambda = s - m \quad (3.21)$$

$$\lambda = s + 2m$$

Estas raíces son los valores característicos de D y se denominan los valores característicos de *secuencia positiva*, *negativa* y *cero*, respectivamente. Los correspondientes vectores

característicos de D pueden encontrarse sustituyendo (3.21) en (3.20) y resolviendo los sistemas de ecuaciones resultantes

$$(D - \lambda_+ I)e_+ = 0 \quad \|e_+\| \neq 0 \quad (3.22)$$

$$(D - \lambda_- I)e_- = 0 \quad \|e_-\| \neq 0 \quad (3.23)$$

$$(D - \lambda_0 I)e_0 = 0 \quad \|e_0\| \neq 0 \quad (3.24)$$

El conjunto de vectores característicos ortonormal complejo, no es único y depende de la selección de ciertos elementos de los vectores característicos. Una selección común, y que corresponde a la transformación de componentes simétricas, es

$$e_+ = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{pmatrix} \quad e_- = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^2 \end{pmatrix} \quad e_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donde $\alpha = 1e^{j120^\circ}$.

En realidad al resolver (3.10), (3.11) y (3.12) obtenemos como resultado las condiciones

$$e_+ = \begin{pmatrix} e_{+1} \\ e_{+2} \\ e_{+3} \end{pmatrix} \quad e_- = \begin{pmatrix} e_{-1} \\ e_{-2} \\ e_{-3} \end{pmatrix}$$

$$e_{+1} + e_{+2} + e_{+3} = 0$$

$$e_{-1} + e_{-2} + e_{-3} = 0$$

y para

$$e_0 = \begin{pmatrix} e_{01} \\ e_{02} \\ e_{03} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ k \\ k \end{pmatrix} \quad \text{donde } k \text{ es cualquier constante.}$$

Lo anterior significa que existen un número infinito de vectores característicos como solución de (3.22), (3.23) y (3.24); la motivación detrás de la elección de los valores característicos mostrados, está basada en observaciones físicas. Cuando los vectores característicos e_+ , e_- y e_0 conforman las columnas de una matriz $M = (e_0 | e_+ | e_-)$ la

matriz M se denomina *matriz modal de D* , y tiene la propiedad de que diagonaliza D en la transformación de semejanza

$$M^{-1}DM = \Lambda = \text{diag}(\lambda_0, \lambda_+, \lambda_-)$$

Una consecuencia de la ortnormalidad de los vectores característicos es

$$M^H = M^{-1}$$

M^H es la operación Hermitiana sobre una matriz, conocida como transposición compleja conjugada, y se define como

$$(M^H)_{ij} = (M)_{ji}^*.$$

Cuando M tiene elementos reales, M^H es equivalente a la transposición, M^t . Una matriz para la cual $M^H = M^{-1}$ se llama *unitaria*. Si $M^H = M$, entonces M es una *matriz hermitiana*.

Si D es la submatriz de (3x3), $Y_{ij}^{3\phi}$, la ecuación

$$I = Y_{ij}^{3\phi} V'$$

se desacopla mediante

$$V = MV'$$

$$I = MI'$$

sustituyendo obtendremos

$$MI' = Y_{ij}^{3\phi} MV'$$

lo cual nos conduce a

$$I' = [M^{-1}Y_{ij}^{3\phi}M]V'$$

$$I' = \Lambda_{ij} V'$$

donde

$$\Lambda_{ij} = \text{diag}(\lambda_{0ij}, \lambda_{+ij}, \lambda_{-ij})$$

Es importante hacer notar que de acuerdo al desarrollo anterior, podemos ver que la transformación de componentes simétricas no es la única transformación que existe. De hecho existen varias transformaciones como la Clarke, Karrenbauer, etc. Sin embargo, la transformación de componentes simétricas es muy popular en el ámbito de los sistemas de potencia, lo cual es explicable en parte por razones históricas y en parte por la interpretación física de los vectores V e I . Las ideas explicadas se aplican a los vectores V_{bus} e I_{bus} completos. De hecho usando la transformación de componentes simétricas, la ecuación

$$I_{bus}^{3f} = Y_{bus}^{3f} V_{bus}^{3f}$$

se convierte en

$$I_{bus}^{012} = T^{-1} Y_{bus}^{3f} T V_{bus}^{012}$$

donde

$$T = \begin{pmatrix} M & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & M & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & M & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & M \end{pmatrix}$$

y

$$M I_{bus}^{012} = I_{bus}^{3f}$$

$$M V_{bus}^{012} = V_{bus}^{3f}$$

En otras palabras, cada tripleta de I_{bus}^{3f} y V_{bus}^{3f} se transforma usando la transformación de componentes simétricas. El coeficiente resultante de V_{bus}^{012} en la ecuación de arriba es

$$Y_{bus}^{012} = T^{-1} Y_{bus}^{3f} T = \begin{pmatrix} \text{diag}(l_{011}, l_{+11}, l_{-11}) & \text{diag}(l_{012}, l_{+12}, l_{-12}) & . & . & . \\ \text{diag}(l_{021}, l_{+21}, l_{-21}) & \text{diag}(l_{022}, l_{+22}, l_{-22}) & . & . & . \\ . & . & . & . & . \end{pmatrix}$$

Cada bloque de 3x3 de Y_{bus}^{3f} ha sido diagonalizado. Es decir, el renglón 1 en (14) está acoplado solamente a los renglones 4,7,10,etc. , mientras que el renglón 2 está acoplado únicamente a los renglones 5,8,11,etc. Si extraemos los renglones 1,4,7,10,etc. obtenemos la relación para secuencia positiva

$$I_{bus}^+ = Y_{bus}^+ V_{bus}^+$$

De manera similar

$$I_{bus}^- = Y_{bus}^- V_{bus}^-$$

$$I_{bus}^0 = Y_{bus}^0 V_{bus}^0$$

Las ecuaciones anteriores representan tres redes desacopladas entre sí. La transformación de componentes simétricas será

$$M = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{pmatrix}$$

Dado que el orden de las tres fases no tiene que ser 0,1,2 como es el caso anterior, podemos obtener otras transformaciones, asociadas con otros tantos ordenamientos distintos a los mostrados arriba, p.ej., 1,2 0 (+,-,0). Sin embargo, el resultado que obtenemos es el mismo independientemente de la transformación usada.

Es muy importante notar que M no necesita ser ortonormal, esto es, el vector característico D no necesita estar normalizado. Lo anterior significa que cM diagonaliza a D, si M también la diagonaliza. Aquí c es una constante no cero y compleja en general.

Lo anterior explica el hecho de que la transformación usada aquí, difiere de la comúnmente usada en la literatura. La diferencia consiste en que M no tiene como factor el escalar $\frac{1}{\sqrt{3}}$ y el factor de M^{-1} es $\frac{1}{3}$, esto a diferencia de que en nuestro caso, tanto M como M^{-1} , tienen el factor $\frac{1}{\sqrt{3}}$. A la transformación usada aquí se le conoce como *invariante en la potencia*.

En resumen, la transformación invariante en la potencia será

$$M = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{pmatrix} \quad M^{-1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{pmatrix}$$

Asociada a cada conjunto de componentes de secuencia, existen redes formadas por impedancias presentadas al flujo de corriente de secuencia positiva, negativa, y cero, respectivamente, por cada elemento del sistema. El concepto de impedancia de secuencia de fase no es difícil de visualizar, pues simplemente representa la razón del voltaje de la secuencia correspondiente, a la corriente de la misma secuencia en la red correspondiente.

3.2.FORMACION DE Z_{BUS} POR ALGORITMO.

Existen diversas maneras de obtener la matriz Z_{bus} , alternativas por supuesto a la inversión matricial convencional de Y_{bus} , lo cual es insuficiente para sistemas de tamaño medio y grandes. Un algoritmo muy conocido en la literatura es el que se presenta enseguida.

La idea general de este método consiste en construir la red paso a paso, ó sea agregando un elemento de ésta a la vez, y reflejando este hecho a través de la modificación correspondiente a la matriz Z_{bus} de la red antes de agregar dicho elemento. De acuerdo con esto, agregar un elemento a la red parcial conduce a las siguientes posibles situaciones:

1. Agregar un elemento de impedancia z_b conectado entre un bus nuevo y referencia.
2. Agregar un elemento de impedancia z_b conectado entre un bus nuevo y bus viejo.
3. Agregar un elemento de impedancia z_b conectado entre un bus viejo y referencia.
4. Agregar un elemento de impedancia z_b conectado entre dos buses viejos.
5. Agregar un elemento de impedancia z_b conectado entre dos buses nuevos.

El término "nuevo" significa un bus que no existía previamente en la red, mientras que el término "viejo" se refiere a un bus que ya existía previamente.

La situación descrita en el punto 5 de arriba es indeseable, pues conduce a la formación de islas y por tanto se puede prevenir que no ocurra.

Analizaremos la modificación tipo 1. En este caso la matriz Z_{bus} aumentará de tamaño debido a la anexión de un nuevo nodo, el nodo k . Con este caso debe iniciarse el procedimiento de formación de la Z_{bus} , pues el eje matricial (renglón y columna) correspondiente al nodo de referencia es nulo y por lo tanto no se almacena. La siguiente figura muestra la red parcial al momento de agregar el nuevo elemento. Aquí el nuevo bus se designa como k

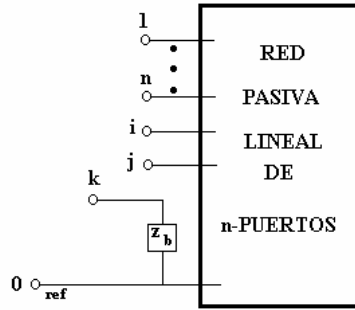


Figura 3.6. Caso 1.

Si inyectamos una corriente, I_k , al nodo k con los demás nodos en circuito abierto tendremos, recordando el método de prueba en circuito abierto, $V_k = z_b I_k$, de donde por

definición obtenemos $Z_{kk} = \frac{V_k}{I_k} = z_b$.

Además para los demás nodos $V_i = Z_{ik} I_k$ $i = 1, 2, \dots, n$ $i \neq k$. Como $V_i = 0$ entonces tenemos $Z_{ik} = Z_{ki} = 0$.

Lo anterior se puede resumir generando la nueva matriz Z_{bus} que refleje el cambio correspondiente

$$Z_{bus} = \left(\begin{array}{ccccc|c} & & & & & 0 \\ & & & & & \cdot \\ & & & & & \cdot \\ & & & & & \cdot \\ & & & & & \cdot \\ & & & & & 0 \\ \hline 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & z_b \end{array} \right) \quad (3.24).$$

Para el caso 2, adición de un elemento con impedancia z_b conectado entre un nodo viejo (j) y nodo nuevo (k), recurrimos al diagrama siguiente

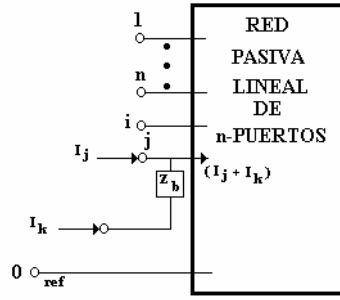


Figura 3.7. Caso 2.

Aquí el orden de la Z_{bus} también aumentará debido al bus k . Si aplicamos LVK a la trayectoria compuesta por los buses j y k , obtenemos $V_k = z_b I_k + V_j$,

pero $V_j = Z_{j1}I_1 + Z_{j2}I_2 + \dots + Z_{jj}(I_j + I_k) + \dots + Z_{jn}I_n$.

Sustituyendo, tenemos

$$V_k = z_b I_k + Z_{j1}I_1 + Z_{j2}I_2 + \dots + Z_{jj}(I_j + I_k) + \dots + Z_{jn}I_n.$$

Factorizando llegamos a

$$V_k = Z_{j1}I_1 + Z_{j2}I_2 + \dots + Z_{jj}I_j + \dots + Z_{jn}I_n + (Z_{jj} + z_b)I_k.$$

Debido a que la corriente inyectada al bus j ha cambiado, de I_j a $(I_j + I_k)$, como efecto de la adición de z_b , entonces las ecuaciones de los voltajes nodales deben modificarse en correspondencia. La ecuación siguiente, para el voltaje en el bus l , corresponde al caso general para $l = 1, 2, \dots, n$ y $l \neq k$,

$$V_l = Z_{l1}I_1 + Z_{l2}I_2 + \dots + Z_{lj}(I_j + I_k) + \dots + Z_{ln}I_n$$

y factorizando

$$V_l = Z_{l1}I_1 + Z_{l2}I_2 + \dots + Z_{lj}I_j + \dots + Z_{ln}I_n + Z_{lj}I_k,$$

por lo que considerando lo anterior, la Z_{bus} se modifica como se indica

$$Z_{bus} = \left(\begin{array}{c|c} Z_{bus(vieja)} & \begin{matrix} Z_{1j} \\ Z_{2j} \\ \vdots \\ Z_{nj} \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} Z_{j1} & Z_{j2} & \cdot & \cdot & \cdot & Z_{jn} \end{matrix} & (Z_{jj} + z_b) \end{array} \right) \quad (3.25).$$

Es decir, en este caso se agrega una columna, la cual es igual a la j -ésima columna; el elemento diagonal será igual a $Z_{jj} + z_b$.

El tercer caso es la adición de una rama de impedancia z_b conectada entre bus viejo y referencia. En este caso trabajaremos como si fuera el caso con k , el bus conectado a referencia, como se indica en la figura siguiente

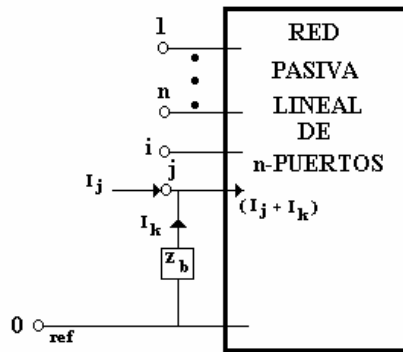


Figura 3.8. Caso 3.

Es obvio que $V_k=0$ en este caso, y entonces las ecuaciones del caso anterior se aplican a este caso, tomando en cuenta dicho cambio

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ V_n \\ 0 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} Z_{bus(vieja)} & \begin{matrix} Z_{1j} \\ \vdots \\ Z_{nj} \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} Z_{j1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & Z_{jn} \end{matrix} & Z_{jj} + z_b \end{array} \right) \begin{pmatrix} I_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ I_n \\ I_k \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

Aplicamos reducción de Kron para eliminar el último eje de la matriz, quedando ésta del mismo orden que tenía antes de agregar z_b , pues no se está agregando ningún nodo nuevo.

Eliminando I_k tenemos

$$Z_{\text{bus}} = Z_{\text{bus(vieja)}} - \frac{1}{Z_{jj} + z_b} \begin{pmatrix} Z_{1j} \\ \vdots \\ Z_{nj} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_{j1} & \dots & Z_{jn} \end{pmatrix} \quad (3.27).$$

El cuarto tipo de modificación que se ha de obtener, corresponde a la adición de una rama de impedancia z_b conectada entre dos buses viejos, es decir, entre dos buses ya existentes previamente. Consideremos la figura siguiente como referencia, en la que se muestra z_b conectada entre los buses i y j .

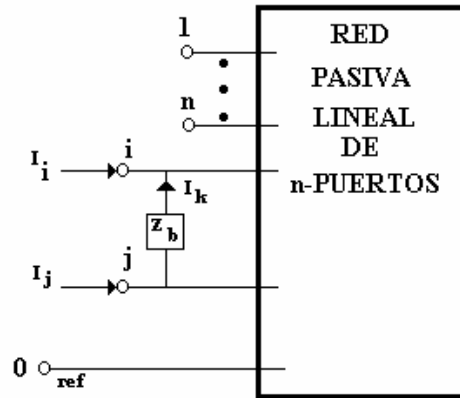


Figura 3.8. Caso 4.

El efecto de la adición de z_b será modificar las inyecciones a los buses i y j . El voltaje del bus 1 será ahora

$$V_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 + \dots + Z_{1i}(I_i + I_k) + Z_{1j}(I_j - I_k) + \dots + Z_{1n}I_n.$$

Factorizando esta última ecuación tendremos

$$V_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 + \dots + Z_{1i}I_i + Z_{1j}I_j + \dots + Z_{1n}I_n + (Z_{1i} - Z_{1j})I_k.$$

Se pueden escribir ecuaciones similares para todos los puertos. Para los demás buses tenemos

$$V_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 + \dots + Z_{2i}(I_i + I_k) + Z_{2j}(I_j - I_k) + \dots + Z_{2n}I_n$$

de donde factorizando tenemos

$$V_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 + \dots + Z_{2i}I_i + Z_{2j}I_j + \dots + Z_{2n}I_n + (Z_{2i} - Z_{2j})I_k$$

de la misma manera tendremos

$$V_i = Z_{i1}I_1 + Z_{i2}I_2 + \dots + Z_{ii}I_i + Z_{ij}I_j + \dots + Z_{in}I_n + (Z_{ii} - Z_{ij})I_k$$

$$V_j = Z_{j1}I_1 + Z_{j2}I_2 + \dots + Z_{ji}I_i + Z_{jj}I_j + \dots + Z_{jn}I_n + (Z_{ji} - Z_{jj})I_k$$

.

.

.

$$V_n = Z_{n1}I_1 + Z_{n2}I_2 + \dots + Z_{ni}I_i + Z_{nj}I_j + \dots + Z_{nn}I_n + (Z_{ni} - Z_{nj})I_k$$

Para los nodos i y j podemos obtener por LVK $V_j = z_b I_k + V_i$, donde sustituyendo las expresiones para V_i y V_j tendremos

$$Z_{j1}I_1 + \dots + Z_{ji}(I_i + I_k) + Z_{jj}(I_j - I_k) + \dots + Z_{jn}I_n = z_b I_k + Z_{i1}I_1 + \dots + Z_{ii}(I_i + I_k) + Z_{ij}(I_j - I_k) + \dots + Z_{in}I_n$$

Factorizando obtendremos

$$0 = (Z_{i1} - Z_{j1})I_1 + \dots + (Z_{ii} - Z_{ji})I_i + (Z_{ij} - Z_{jj})I_j + \dots + (z_b + Z_{ii} + Z_{jj} - Z_{ij} - Z_{ji})I_k.$$

Escribiendo las n+1 ecuaciones nodales $V_{bus} = Z_{bus} I_{bus}$ en forma matricial

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{V_n}{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & & & (Z_{1i} - Z_{1j}) \\ & & & & (Z_{2i} - Z_{2j}) \\ & & Z_{bus(vieja)} & & \vdots \\ & & & & \vdots \\ & & & & \vdots \\ (Z_{i1} - Z_{j1}) & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & (z_b + Z_{ii} + Z_{jj} - 2Z_{ij}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ I_n \\ I_k \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

Eliminando I_k por reducción de Kron obtenemos finalmente

$$Z_{bus} = Z_{bus(vieja)} - \frac{1}{z_b + Z_{ii} + Z_{jj} - 2Z_{ij}} \begin{pmatrix} Z_{1i} - Z_{1j} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ Z_{ni} - Z_{nj} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (Z_{i1} - Z_{j1}) & \cdot & \cdot & \cdot & (Z_{in} - Z_{jn}) \end{pmatrix} \quad (3.29).$$

3.2.1. INCLUSION DE ELEMENTOS MAGNETICAMENTE ACOPLADOS.

En todos los casos previamente discutidos existe el hecho común de que no hay acoplamientos mutuos entre los elementos de la red. En un sistema de potencia pueden existir elementos magnéticamente acoplados. Este acoplamiento aparece con mucha frecuencia en los sistemas de transmisión, donde es común encontrar líneas de transmisión que comparten el mismo derecho de vía, es decir, ó bien líneas de circuito doble ó líneas que corren total ó parcialmente muy cercanas entre sí. El efecto de acoplamiento en estos casos es muy débil en las redes de secuencia positiva y negativa; sin embargo en secuencia cero es muy notorio, por lo que en aquellos casos se desprecia, no así en este último, es decir a secuencia cero. Por esta razón es importante incluir el caso de agregar una rama a la red, que está magnéticamente acoplada con otra.

Consideremos dos ramas cuyas impedancias propias son z_A y z_B , las cuales tienen además una impedancia mutua z_m .

Los buses entre los cuales se conectan dichas ramas son j, k, l y m , como se muestra en la siguiente figura

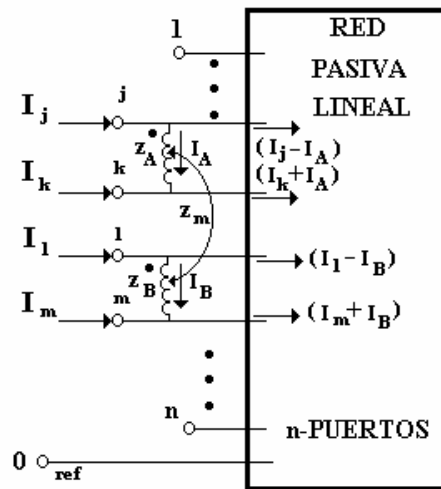


Figura 3.9. Inclusión de elementos magnéticamente acoplados.

El voltaje nodal para cualquier bus i de la red está dado por

$$V_i = Z_{i1}I_1 + Z_{i2}I_2 + \dots + Z_{ij}(I_j - I_A) + Z_{ik}(I_k + I_A) + Z_{il}(I_l - I_B) + Z_{im}(I_m + I_B) + \dots + Z_{in}I_n$$

Factorizando tendremos

$$V_i = Z_{i1}I_1 + Z_{i2}I_2 + \dots + Z_{ij}I_j + Z_{ik}I_k + Z_{il}I_l + Z_{im}I_m + \dots + Z_{in}I_n + (Z_{ik} - Z_{ij})I_A + (Z_{im} - Z_{il})I_B \quad (3.30)$$

Por otro lado si aplicamos LVK a la trayectoria cerrada entre los nodos j y k

$$V_j = z_A I_A + z_m I_B + V_k$$

sustituyendo (3.30) en esta última ecuación (para $i=j$ e $i=k$)

$$Z_{j1}I_1+...+Z_{jn}I_n+(Z_{jk}-Z_{jj})I_A+(Z_{jm}-Z_{jl})I_B=Z_AI_A+Z_BI_B+Z_{kl}I_1+...+Z_{kn}I_n+(Z_{kk}-Z_{kj})I_A+(Z_{km}-Z_{kl})I_B$$

Factorizando llegamos a

$$0 = (Z_{k1} - Z_{j1})I_1 + \dots + (Z_{kn} - Z_{jn})I_n + (z_A + Z_{jj} + Z_{kk} - 2Z_{jk})I_A + (z_m + Z_{jl} + Z_{km} - Z_{jm} - Z_{kl})I_B.$$

De igual forma para los nodos l y m

$$V_l = z_B I_B + z_m I_A + V_m.$$

Nuevamente sustituimos (1) con $i=l$ e $i=m$

$$Z_{l_1 l_1} I_1 + \dots + Z_{l_n l_n} I_n + (Z_{l_k} - Z_{l_j}) I_A + (Z_{l_m} - Z_{l_l}) I_B = z_{B'B} I_B + z_{l_n A} I_A + z_{l_m l_1} I_1 + \dots + z_{l_m l_n} I_n + (Z_{l_{nk}} - Z_{l_{nj}}) I_A + (Z_{l_{lm}} - Z_{l_{ll}}) I_B$$

Factorizando esta última ecuación tendremos

$$0 = (Z_{m1} - Z_{l1})I_1 + \dots + (Z_{mn} - Z_{ln})I_n + (z_m + Z_{ij} + Z_{mk} - Z_{lk} - Z_{nj})I_A + (z_B + Z_{ll} + Z_{mm} - 2Z_{lm})I_B$$

Si recolectamos las ecuaciones, dadas por (3.30), así como las dos últimas ecuaciones igualadas a cero, en forma matricial obtenemos

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ V_n \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ \hline \cdot & \cdot & (Z_{ki} - Z_{ji}) & \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & (Z_{mi} - Z_{li}) & \cdot & \cdot & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ (Z_{ik} - Z_{ij}) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \hline (z_A + Z_{ji} + Z_{kk} - 2Z_{jk}) \\ (z_m + Z_{ij} + Z_{mk} - Z_{lk} - Z_{mj}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ (Z_{im} - Z_{il}) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \hline (z_m + Z_{jl} + Z_{km} - Z_{jm} - Z_{kl}) \\ (z_B + Z_{ll} + Z_{mm} - 2Z_{lm}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ I_n \\ \hline I_A \\ I_B \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

Lo anterior puede reducirse usando la reducción de Kron. Definamos la partición arriba marcada como

$$\mathbf{Z}_{\text{bus}} = \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_{\text{bus(vieja)}} & \mathbf{Z}_{\text{AB}} \\ \mathbf{Z}_{\text{BA}} & \mathbf{Z}_{\text{BB}} \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

entonces

$$Z_{bus} = Z_{bus(vieja)} - Z_{AB} Z_{BB}^{-1} Z_{BA} \quad (3.33).$$

3.2.3. ALGORITMO DE HOMER BROWN [5].

Para casos de sistemas de potencia pequeños, la secuencia en que se debe construir la red para la obtención de Z_{bus} por algoritmo, es fácil de determinar por simple inspección. Sin embargo, en sistemas reales, de tamaño moderado en adelante, lo anterior no es posible prácticamente. Además es importante notar que el costo computacional de la obtención de Z_{bus} , depende de la secuencia en que se construya la red. Recuerde que en el caso de cerrar trayectoria, cuando se agrega una rama entre nodos ya existentes, se debe formar una matriz que al restarse de la $Z_{bus(vieja)}$, nos proporciona la Z_{bus} correspondiente al evento de agregar dicha rama. Obviamente que mientras más se tarde en completar trayectorias cerradas, la matriz antes mencionada será de mayor orden y por tanto se requerirán más operaciones para generarla. Por lo tanto un criterio de optimalidad para llevar a cabo la formación de la red, será el de cerrar trayectorias lo antes posible. Se han hecho intentos de desarrollar algoritmos que se acerquen a la optimalidad mencionada; sin embargo la lógica de estos algoritmos es complicada y este hecho hace poco ventajoso su uso, comparado con el ahorro de recursos computacionales. H E Brown desarrolló un algoritmo sencillo, que produce buenos resultados. A continuación se discute dicho algoritmo.

El algoritmo hace uso de tres arreglos fundamentalmente: un arreglo que contiene la lista de las líneas desordenada, LID, en un formato en el que se indican dos códigos que corresponden a los nodos a los que están conectadas dichas líneas; otro arreglo que contiene la lista de buses del sistema, LBS, y que inicialmente está vacío; y finalmente, otro arreglo que terminará conteniendo la lista de líneas ordenadas, LLO. En las páginas anexas se presenta el diagrama de flujo correspondiente al algoritmo mencionado.

Con el objeto de ejemplificar el algoritmo descrito, usamos el sistema de potencia que se muestra a continuación considerando que el bus 1 se designa como

referencia. No se muestran los parámetros de las líneas debido a que obviamente es información irrelevante en este caso.

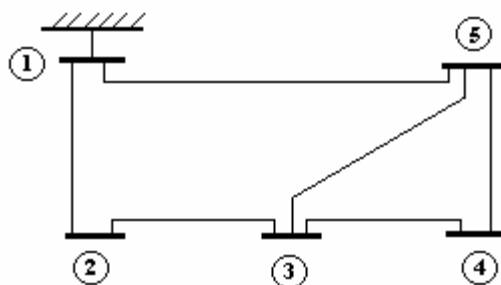


Figura 3.10. Sistema de potencia del ejemplo.

Los datos de los elementos del sistema están dados en la siguiente tabla:

Nodo p-Nodo q
1-2
4-5
2-3
1-5
3-5
3-4

Los datos proporcionados forman el arreglo LLD

LLD
1-2
4-5
2-3
1-5
3-5
3-4

Los arreglos restantes resultan como se muestra

LBS
2
3
5
4

LLO
1-2
2-3
1-5
3-5
4-5
3-4

A continuación se muestra el sistema, con la secuencia en que se agregan los elementos, de acuerdo con LLO , mostrada con el número entre paréntesis.

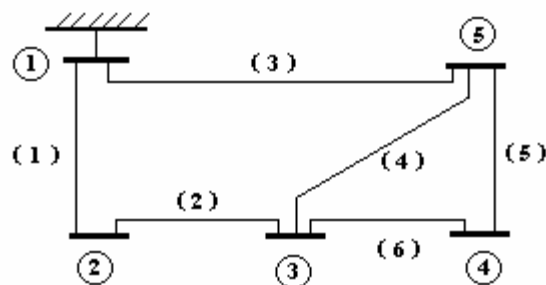


Figura 3.11. Resultados del ordenamiento.

3.2.4.ALGORITMO DE LA Z_{BUS} DISPERSA[6].

Si se toma en cuenta que únicamente se requieren los elementos de la Z_{bus} asociados con elementos existentes en la red, es enormemente ventajoso poder obtener de manera selectiva dichos elementos, ahorrando memoria y tiempo con esto. El algoritmo denominado Z_{bus} dispersa, obtiene únicamente dichos elementos, partiendo de explotar la dispersidad de la matriz Y_{bus} y de utilizar la formulación que a continuación se menciona.

Partimos de la expresión matricial

$$[Y][Z] = [I] \quad (3.34)$$

donde $[Y]$ es la matriz Y_{bus} de la red

$$\begin{aligned} [Z] & \text{ " " " } Z_{bus} \text{ " "} \\ [I] & \text{ " " identidad .} \end{aligned}$$

Si factorizamos $[Y]=[L] [D] [L]^T$ entonces sustituyendo en (3.34), obtenemos

$$[L] [D] [L]^T [Z] = [I] \quad .$$

Si premultiplicamos por $\{[L] [D]\}^{-1} = [D]^{-1} [L]^{-1}$ obtenemos

$$[L]^T [Z] = [D]^{-1} [L]^{-1} [I] \quad (3.35).$$

Definimos además

$$[W] = [D]^{-1} [L]^{-1} \quad (3.36)$$

sustituyendo en (2):

$$[L]^T [Z] = [W] \quad (3.37).$$

La matriz $[W]$ es muy importante y solamente se requieren los términos diagonales, que además, dado que $[L]$ es matriz inferior con diagonal unitaria, $[L]^{-1}$ lo es también; además $[D]^{-1}$ es una matriz diagonal y por tanto, $[W]$ es una matriz triangular inferior cuyos elementos diagonales W_{ii} son igual a $(1/d_{ii})$, $i=1,...,n$. Por lo tanto para resolver $[W]$ únicamente es necesario resolver la inversa de $[D]$!, lo cual es simple pues recordemos que $[D]$ es diagonal.

Por otro lado, se define otra importante matriz de esta formulación

$$[T] = -[L]^T + [I]$$

de donde obtenemos

$$[L]^T = [I] - [T]$$

y finalmente sustituyendo en (3.37):

$$([I] - [T])[Z] = [W]$$

ó bien

$$[Z] - [T][Z] = [W]$$

de donde

$$[Z] = [T][Z] + [W] \quad (3.38).$$

Es fundamental observar que la matriz $[T]$, denominada matriz de conexión ponderada por los autores de este método, contiene la información de los elementos requeridos en la formulación, es decir que como puede verse del ejemplo siguiente, los elementos t_{ij} de esta matriz son cero precisamente correspondiendo a los elementos no existentes en la red. Entonces guiados por la estructura de $[T]$, se calcularán los elementos de Z_{bus} correspondientes a los elementos existentes en la red, más los términos producidos por llenado en el proceso de factorización.

La ecuación (3.38) se debe resolver en forma regresiva (hacia atrás), como puede verse en el caso de orden 5: $[Z] = [T][Z] + [W]$

$$\begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} & Z_{14} & Z_{15} \\ & Z_{22} & Z_{23} & Z_{24} & Z_{25} \\ & & Z_{33} & Z_{34} & Z_{35} \\ & & & Z_{44} & Z_{45} \\ & & & & Z_{55} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & t_{12} & t_{13} & t_{14} & t_{15} \\ & 0 & t_{23} & t_{24} & t_{25} \\ & & 0 & t_{34} & t_{35} \\ & & & 0 & t_{45} \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} & Z_{14} & Z_{15} \\ & Z_{22} & Z_{23} & Z_{24} & Z_{25} \\ & & Z_{33} & Z_{34} & Z_{35} \\ & & & Z_{44} & Z_{45} \\ & & & & Z_{55} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_{11} & & & & \\ & w_{21} & w_{22} & & \\ & & w_{31} & w_{32} & w_{33} \\ & & & w_{41} & w_{42} & w_{43} & w_{44} \\ & & & & w_{51} & w_{52} & w_{53} & w_{54} & w_{55} \end{pmatrix}$$

$$Z_{55} = w_{55}$$

$$Z_{45} = t_{45} Z_{55}$$

$$Z_{44} = w_{44} + t_{45} Z_{54}$$

$$Z_{35} = t_{35} Z_{55} + t_{34} Z_{45}$$

$$\begin{aligned}
Z_{34} &= t_{35} Z_{54} + t_{34} Z_{44} \\
Z_{33} &= w_{33} + t_{35} Z_{53} + t_{34} Z_{43} \\
Z_{25} &= t_{25} Z_{55} + t_{24} Z_{45} + t_{23} Z_{35} \\
Z_{24} &= t_{25} Z_{54} + t_{24} Z_{44} + t_{23} Z_{34} \\
Z_{23} &= t_{25} Z_{53} + t_{24} Z_{43} + t_{23} Z_{33} \\
Z_{22} &= w_{22} + t_{25} Z_{52} + t_{24} Z_{42} + t_{23} Z_{32} \\
Z_{15} &= t_{15} Z_{55} + t_{14} Z_{45} + t_{13} Z_{35} + t_{12} Z_{25} \\
Z_{14} &= t_{15} Z_{54} + t_{14} Z_{44} + t_{13} Z_{34} + t_{12} Z_{24} \\
Z_{13} &= t_{15} Z_{53} + t_{14} Z_{43} + t_{13} Z_{33} + t_{12} Z_{23} \\
Z_{12} &= t_{15} Z_{52} + t_{14} Z_{42} + t_{13} Z_{32} + t_{12} Z_{22} \\
Z_{11} &= w_{11} + t_{15} Z_{51} + t_{14} Z_{41} + t_{13} Z_{31} + t_{12} Z_{21}
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Es oportuno desarrollar un ejemplo sencillo en este punto par ayudar a entender las ideas antes expuestas.

EJEMPLO. Consideremos el sistema de potencia mostrado, cuya matriz Y_{bus} se muestra también.

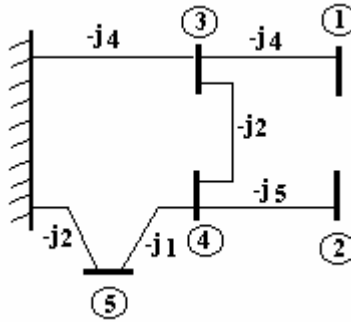


Figura 3. 12. Sistema de potencia.

$$Y_{\text{bus}} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -5 & 0 \\ -4 & 0 & 10 & -2 & 0 \\ 0 & -5 & -2 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

El orden de codificación de los nodos corresponde al ordenamiento óptimo del caso presentado. Como se vé de las matrices factor, no se produce llenado. Usando la ecuación (3.39)

$$Z_{55} = w_{55} = 0.3889$$

$$Z_{45} = t_{45} Z_{55} = (0.4286)(0.3889) = 0.1666825$$

$$Z_{44} = w_{44} + t_{45} Z_{54} = (0.4286) + (0.4286)(0.1666825) = 0.50004$$

$$Z_{35} = t_{35} Z_{55} + t_{34} Z_{45} \quad \text{No se requiere}$$

$$Z_{34} = t_{35} Z_{54} + t_{34} Z_{44} = (0)Z_{54} + (0.3333)(0.50004) = 0.1666633$$

$$Z_{33} = w_{33} + t_{35} Z_{53} + t_{34} Z_{43} = 0.1667 + (0) Z_{53} + (0.3333)(0.1666633) = 0.22225$$

$$Z_{25} = t_{25} Z_{55} + t_{24} Z_{45} + t_{23} Z_{35} \quad \text{No se requiere}$$

$$Z_{24} = t_{25} Z_{54} + t_{24} Z_{44} + t_{23} Z_{34} = (1)(0.50004) = 0.50004$$

$$Z_{23} = t_{25} Z_{53} + t_{24} Z_{43} + t_{23} Z_{33} \quad \text{No se requiere}$$

$$Z_{22} = w_{22} + t_{25} Z_{52} + t_{24} Z_{42} + t_{23} Z_{32} = 0.2 + (1)(0.50004) = 0.70004$$

$$Z_{15} = t_{15} Z_{55} + t_{14} Z_{45} + t_{13} Z_{35} + t_{12} Z_{25} \quad \text{No se requiere}$$

$$Z_{14} = t_{15} Z_{54} + t_{14} Z_{44} + t_{13} Z_{34} + t_{12} Z_{24} \quad \text{No se requiere}$$

$$Z_{13} = t_{15} Z_{53} + t_{14} Z_{43} + t_{13} Z_{33} + t_{12} Z_{23} = (1)(0.22225) = 0.22225$$

$$Z_{12} = t_{15} Z_{52} + t_{14} Z_{42} + t_{13} Z_{32} + t_{12} Z_{22} \quad \text{No se requiere}$$

$$Z_{11} = w_{11} + t_{15} Z_{51} + t_{14} Z_{41} + t_{13} Z_{31} + t_{12} Z_{21} = 0.25 + (1)(0.22225) = 0.47225$$

De aquí la Z_{bus} quedará

$$Z_{\text{bus}} = \begin{pmatrix} 0.47225 & - & 0.22225 & - & - \\ & 0.70004 & - & 0.50004 & - \\ & & 0.22225 & 0.1666633 & - \\ & & & 0.50004 & 0.16666825 \\ & & & & 0.3889 \end{pmatrix}$$

Takahashi, Fagan, Chen. "A sparse bus impedance matrix and its applications", 1973 PICA Conference Proceedings.

3.3. FALLAS DESBALANCEADAS.

El análisis de fallas asimétricas, es decir aquella en que no se preserva la naturaleza simétrica que se atribuye al sistema eléctrico normalmente, tiene dos opciones para llevarse a cabo: en el marco de referencia trifásico, lo que denominan algunos autores como coordenadas de fase, ó bien usando las componentes simétricas, cuya base matemática se discutió en la unidad anterior. Esta última opción es la más usada en el estudio de fallas asimétricas y dicha transformación también. El uso de la transformación de componentes simétricas supone que el *sistema previo a la falla es simétrico*, de lo contrario no obtendríamos ningún beneficio al usar dicha transformación en el estudio mencionado, y no quedaría más remedio que usar la primera opción mencionada, es decir hacer el estudio en coordenadas de fase.

Antes de modelar los diferentes tipos de fallas asimétricas ó desbalanceadas, como las denominan algunos autores, debemos complementar el material de componentes simétricas visto en la unidad anterior. Lo anterior se refiere a la modelación de los elementos principales del sistema que intervienen en el tipo de falla mencionado, ante diferentes las diferentes secuencias, principalmente la secuencia cero.

IMPEDANCIAS DE SECUENCIA EN LINEAS DE TRANSMISION.

Primeramente, podemos probar fácilmente que las impedancias de la línea a secuencia positiva y negativa, son iguales; es decir $z_{\text{línea}}^+ = z_{\text{línea}}^-$. Es importante hacer notar que suponemos que las impedancias de la línea son iguales (balanceadas), lo cual es una buena aproximación cuando la línea se ha transpuesto.

La impedancia de secuencia cero de la línea $z_{\text{línea}}^0$ no es, en general, igual a las impedancias de la línea de secuencia positiva y negativa. Si recordamos que todas las corrientes de secuencia cero están en fase, el camino de retorno del neutro deberá estar incluido como parte de la impedancia.

Consideremos esquemáticamente el flujo de corrientes de secuencia cero en una línea de transmisión

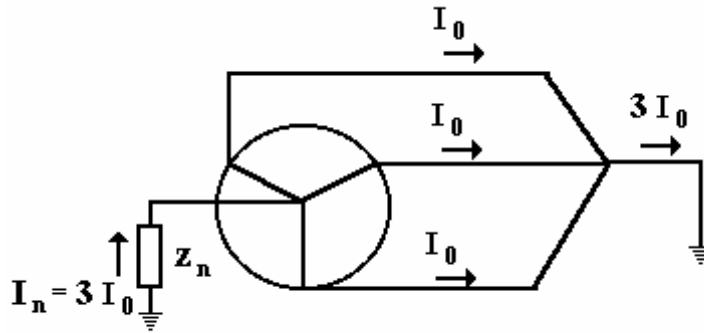


Figura 3.13. Flujo de corrientes de secuencia cero en una línea de transmisión.

Podemos observar dos aspectos importantes, basados en el esquema anterior:

1. La caída de voltaje de secuencia cero entre el neutro y tierra, a través de la impedancia de aterrizado z_n , es proporcional a tres veces I_0 . Por lo tanto la impedancia del neutro a secuencia cero del generador es considerada como $3z_n$.
2. A secuencia cero las tres líneas están acopladas mutuamente, y este acoplamiento ofrecerá mayor reactancia a I^0 que la que ofrece a I^+ e I^- . La razón de lo anterior es que las corrientes de secuencia cero están en fase y por lo tanto también lo están sus correspondientes flujos magnéticos, lo cual causará mayor acoplamiento mutuo que en el caso de secuencia positiva y negativa. El efecto de este acoplamiento mutuo entre fases se incluirá como parte de la inductancia total de la línea por fase, y por lo tanto z^0 será varias veces mayor que z^+ y z^- .

En el caso de circuitos de transmisión paralelos, o sea de líneas que comparten derecho de vía, los parámetros que se proporcionan para el estudio de redes son tales que la impedancia mutua de secuencia cero es muy significativa, mientras que a secuencia positiva y negativa dicha impedancia mutua es despreciable, y se toma en efecto como valor cero. La diferencia de la impedancia mutua a secuencia cero con respecto a las de secuencia positiva y negativa es clara, si tomamos en cuenta que las corrientes balanceadas, a secuencia positiva ó negativa, fluyendo en una de las líneas suman cero, y por lo tanto los enlaces de flujo asociados a la corriente fluyendo en esa línea tienden a cancelarse. Al mismo tiempo, las corrientes de secuencia cero en esa misma línea están en fase, y por lo tanto sus flujos, que enlazan el otro circuito, serán aditivos.

IMPEDANCIA DE SECUENCIA DE GENERADORES.

Las impedancias de secuencia positiva y negativa no son las mismas en el caso de generadores. No es difícil imaginar que el campo magnético giratorio (debido a las corrientes de secuencia positiva de armadura) gira con el rotor, mientras que las corrientes de secuencia negativa de armadura (de secuencia a c b) producen un campo rotatorio a la misma velocidad, pero en dirección opuesta al rotor. Obviamente no se espera que estos dos flujos girando en oposición encuentren la misma oposición al cambio de flujo. En el caso del campo de secuencia negativa que pasa los polos, devanados amortiguadores y devanado de campo dos veces a velocidad sincrónica, encontrando por lo tanto mayor oposición y menor reactancia efectiva.

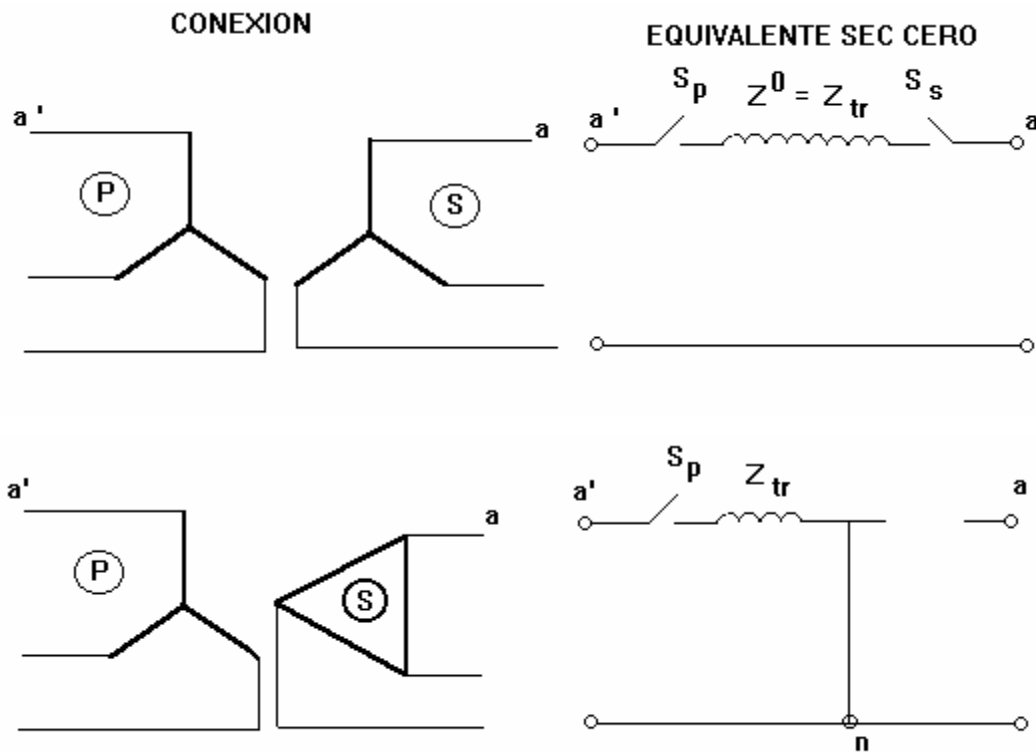
En realidad esta reactancia de secuencia negativa, variará casi senoidalmente con el tiempo entre valores máximo y mínimo al encontrar una configuración del rotor siempre cambiando. Dichos valores máximo y mínimo corresponden a x_q'' y x_d'' respectivamente. A pesar de esta fluctuación, se usa una reactancia de secuencia negativa promedio definida como $x^- = \frac{x_d'' + x_q''}{2}$. La reactancia de secuencia cero del generador es aún más pequeña que la impedancia de secuencia negativa. De hecho, no es inusual que x^0 sea solamente 5% de x^+ . La explicación de esto descansa en el hecho que corrientes de secuencia cero de armadura están en fase pero físicamente desplazadas 120° eléctricamente una de la otra, razón por la cual teóricamente la suma de los tres fmm distribuidos senoidalmente es cero, lo cual resultará en una reactancia de valor cero. Sin embargo, alguna reactancia debida a los efectos de las ranuras, conexiones finales, etc., la cual es reactancia de dispersión, estará presente. Además estrictamente hablando, la distribución de la fmm no es perfectamente senoidal, y esto también trae como consecuencia la presencia de una pequeña reactancia.

IMPEDANCIAS DE SECUENCIA CERO DE TRANSFORMADORES.

Las impedancias de secuencia positiva y negativa en transformadores, al igual que en las líneas de transmisión, son iguales. Siendo la única diferencia la secuencia de fases lo que distingue a dichas corrientes de secuencia positiva y negativa, este factor no cambia la impedancia por fase en estos elementos del sistema.

Con respecto a la impedancia de secuencia cero, se puede hacer la observación general en relación con ésta en transformadores de dos devanados. se supone que si el transformador permite el flujo de secuencia cero, entonces la impedancia de secuencia cero por fase será igual a la impedancia serie ordinaria del transformador z_{tr} , y $z^0 = z^+ = z^- = z_{tr}$. Si por el otro lado, la corriente de secuencia cero no se le permite fluir, entonces $z^0 = \infty$.

Presentamos a continuación los circuitos equivalentes a secuencia cero por fase de las configuraciones diferentes en transformadores trifásicos. Siempre que se encuentre un interruptor, S_p ó S_s , se considerará cerrado solamente si el lado al cual corresponde tiene aterrizado el neutro.



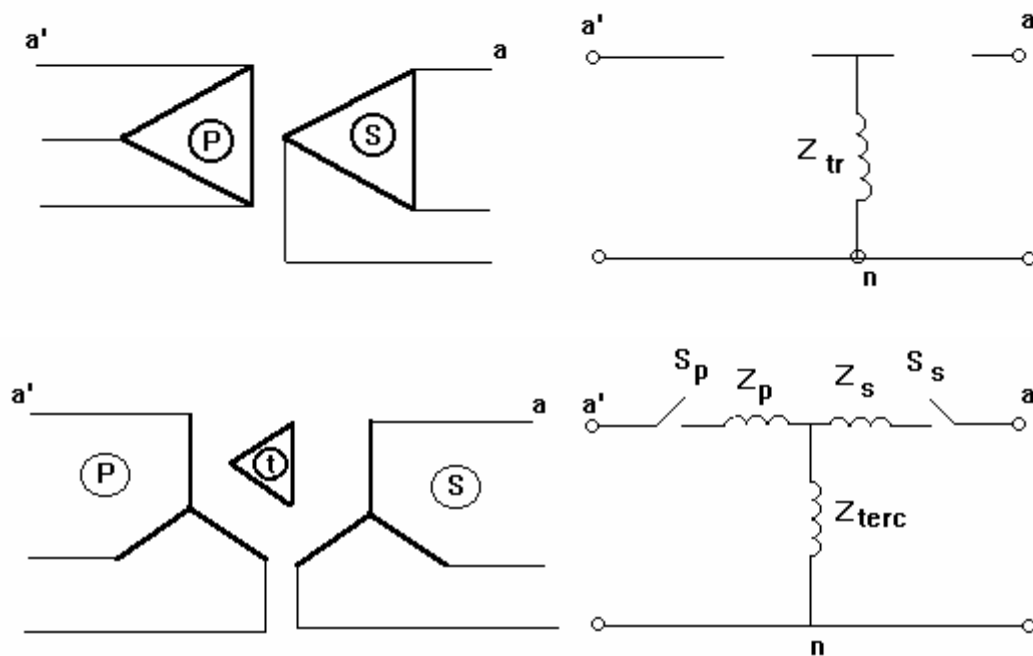


Figura 3.14. Modelado de transformadores a secuencia cero.

ANÁLISIS DE FALLAS DESBALANCEADAS.

El propósito de esta sección consiste, usando el método de componentes simétricas, en obtener los modelos de las fallas desbalanceadas. Aunque el objetivo principal es, como se dijo, analizar fallas desbalanceadas, empezamos con la falla trifásica a tierra con el fin de corroborar el hecho de que dicha falla, conserva la simetría del sistema eléctrico y únicamente involucra la red de secuencia positiva, así como también nos permite ejemplificar la metodología usada para obtener dichos modelos de fallas asimétricas, en el marco del método de las componentes simétricas.

El modelo de falla trifásica involucrando tierra se muestra a continuación

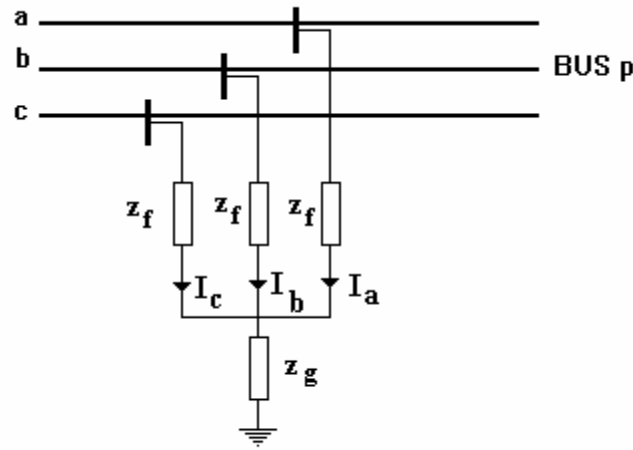


Figura 3.15. Falla trifásica general.

Lo anterior representa el punto del sistema trifásico donde se ubica la falla. Escribiendo las condiciones en el punto de falla para la fase a, aplicando la Ley de Voltajes de Kirchhoff (LVK) a la trayectoria formada por dicha fase y tierra, tendremos

$$V_a = z_f I_a + z_g (I_a + I_b + I_c) = (z_f + z_g) I_a + z_g I_b + z_g I_c$$

Si escribimos una ecuación para cada trayectoria asociada con las otras dos fases, y las ponemos en forma matricial obtenemos

$$\begin{pmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_f + z_g & z_g & z_g \\ z_g & z_f + z_g & z_g \\ z_g & z_g & z_f + z_g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{pmatrix} \quad (3.40)$$

transformando esta ecuación al dominio de las componentes simétricas y recordando que

$$V^{abc} = T_S V^{012} \quad \text{y también} \quad I^{abc} = T_S I^{012} \quad \text{tenemos que} \quad T_S V^{012} = [Z^{fg}] T_S I^{012} \quad \text{y} \\ V^{012} = T_S^{-1} [Z^{fg}] T_S I^{012} .$$

La transformación lineal $T_s^{-1}[Z^{fg}]T_s$, se denomina *transformación de semejanza* asociada a la matriz de coeficientes de (4.1), Z^{fg} , y que produce una matriz diagonal como resultado

$$\begin{pmatrix} V_0 \\ V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_f + 3z_g & & \\ & z_f & \\ & & z_f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_0 \\ I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} \quad (3.41)$$

La ecuación anterior, (4.2), nos muestra un modelo matemático totalmente desacoplado, es decir, V_0 depende únicamente del flujo de la corriente de la misma secuencia; lo mismo puede decirse de los otros dos voltajes de secuencia, V_1 y V_2 .

Lo anterior significa, que si interpretamos desde el punto de vista de redes la ecuación (4.2), las tres redes de secuencia están totalmente desacopladas y recordando que únicamente existen fuentes a secuencia positiva, implica que las redes de secuencia negativa y cero son pasivas.

Si usamos los equivalentes de Thévenin de las redes analizadas, visto por supuesto desde el nodo fallado, podemos representar lo anterior como se muestra

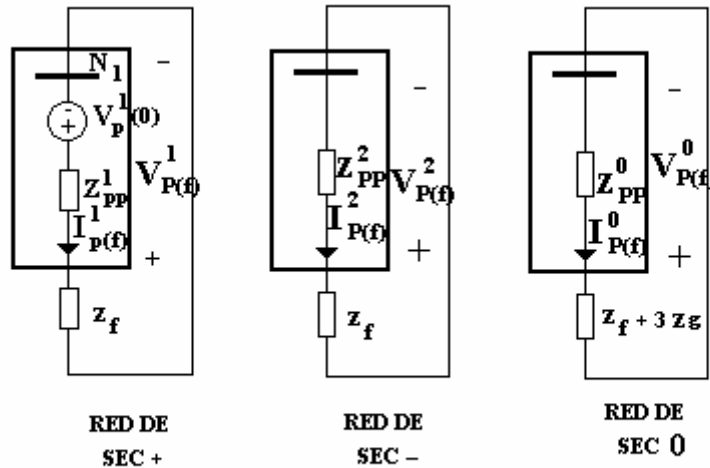


Figura 3.16. Redes de secuencia para falla trifásica general.

De la red de secuencia positiva vemos que

$$I_{p(f)}^1 = \frac{V_{p(0)}^1}{Z_{pp}^1 + z_f}$$

donde $V_{p(0)}^1$: voltaje de prefalla del nodo p (nodo fallado), Z_{pp}^1 es la impedancia equivalente de Thévenin del nodo p.

Además vemos que $I_2 = I_0 = 0$ de donde $I_a = I_1$.

Es importante notar que N_1 y N_2 , los buses ó puntos de referencia de los redes de secuencia positiva y negativa respectivamente, son los neutros; mientras que N_0 , el bus de referencia a secuencia cero, lo constituye tierra. Porque?.

FALLA DE LINEA A TIERRA.

El modelo de esta falla se muestra a continuación

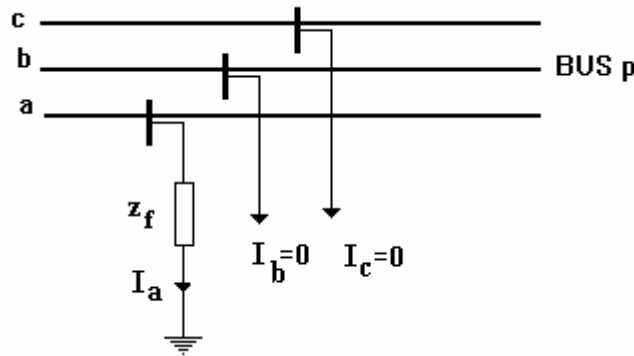


Figura 3.17. Falla de línea a tierra.

Las condiciones en el bus de falla son $I_b = I_c = 0$ y $V_a = z_f I_a$. Recordando que

$I_p^{012} = T_S^{-1} I_p^{abc}$, tenemos $I_{p(f)}^0 = \frac{1}{3}(I_a + I_b + I_c)$; pero como $I_b = I_c = 0$ entonces

$I_{p(f)}^0 = \frac{1}{3} I_a = I_{p(f)}^1 = I_{p(f)}^2$, es decir,

$$I_{p(f)}^0 = I_{p(f)}^1 = I_{p(f)}^2 \quad (3.42).$$

Por otro lado $V_a = V_0 + V_1 + V_2 = z_f I_a$, entonces

$$V_0 + V_1 + V_2 = 3z_f I_0 \quad (3.43)$$

dato que $I_0 = \frac{1}{3} I_a$ para esta falla.

Si interpretamos (3.42) y (3.43) desde el punto de vista de redes, vemos que (3.42) implica que las redes (+, - y 0) están conectadas en serie; además, para que (3.43) se cumpla, LVK requiere que dichas redes se interconectan en serie y se cierren a través de una impedancia de valor $3z_f$, como se muestra en el diagrama a continuación

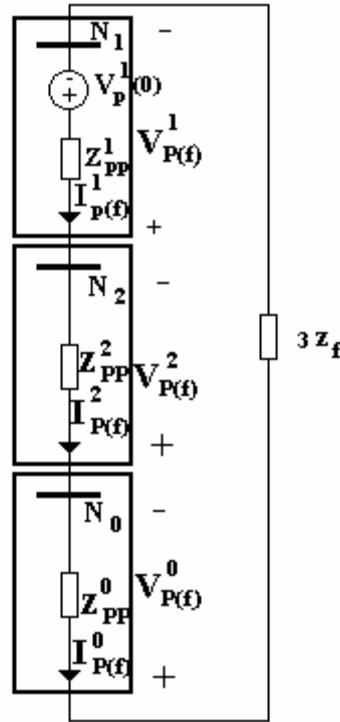


Figura 3.18. Modelo de falla de línea a tierra.

De la red que modela la falla LT y que se muestra arriba obtenemos

$$I_{p(f)}^1 = I_{p(f)}^2 = I_{p(f)}^0 = \frac{V_{p(0)}^1}{Z_{pp}^1 + Z_{pp}^2 + Z_{pp}^0 + 3z_f}$$

y además $I_a = 3I_{p(f)}^0 = 3I_{p(f)}^1 = 3I_{p(f)}^2$ con $I_b = 0$ e $I_c = 0$.

FALLA DE DOS LINEAS.

El modelo de dicha falla, entre las fases *b* y *c*, se muestra a continuación

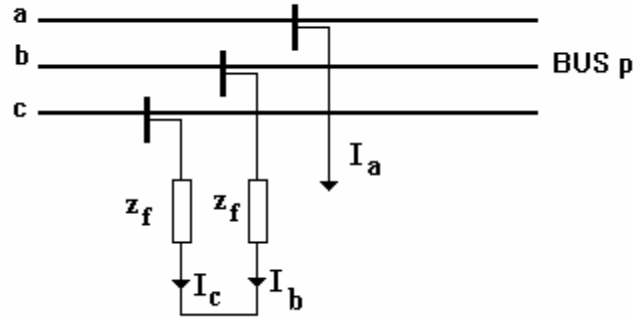


Figura 3.19. Falla de dos líneas.

Las condiciones en el punto de falla, para el caso de las corrientes son $I_a = 0$ e $I_b = -I_c$.

Si aplicamos LVK a la trayectoria cerrada por las fases *b* y *c* con tierra, tendremos que $V_b - z_f I_b + z_f I_c - V_c = 0$, de donde

$$V_b - V_c = z_f (I_b - I_c) \quad (3.44)$$

Para transformar esta última ecuación al dominio de las componentes simétricas, recordemos que

$$V_a = V_0 + V_1 + V_2$$

$$V_b = V_0 + \alpha^2 V_1 + \alpha V_2$$

$$V_c = V_0 + \alpha V_1 + \alpha^2 V_2$$

Relaciones similares son válidas para las corrientes.

Si restamos la 3ª de la 2ª ecuación, del conjunto mostrado arriba, tendremos

$$V_b - V_c = (\alpha^2 - \alpha)V_1 - (\alpha^2 - \alpha)V_2$$

mientras que para las corrientes tenemos

$$I_b - I_c = (\alpha^2 - \alpha)I_1 - (\alpha^2 - \alpha)I_2$$

Sustituyendo estas dos últimas ecuaciones en (3.44),

$$(\alpha^2 - \alpha)V_1 - (\alpha^2 - \alpha)V_2 = z_f [(\alpha^2 - \alpha)I_1 - (\alpha^2 - \alpha)I_2]$$

de donde simplificando tenemos

$$V_1 - z_f I_1 = V_2 - z_f I_2 \quad (3.45).$$

Además $I_0 = 0$, como puede comprobar por $I^{012} = T_S^{-1} I^{abc}$.

Esto último significa que la red de secuencia cero está inactiva, lo que implica que está desconectada de la red de secuencia positiva, que es la única activa de las tres redes de secuencia. Además, (3.45) significa que las redes de secuencia positiva y negativa se conectan en paralelo, con impedancias z_f en serie con estas redes, como puede corroborarse aplicando LVK a la red que se muestra a continuación.

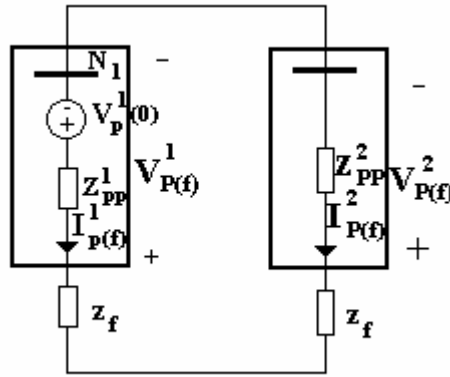


Figura 3.20. Modelo de la falla de dos líneas.

De la red anterior obtenemos $I_{p(f)}^1 = \frac{V_{p(0)}^1}{Z_{pp}^1 + Z_{pp}^2 + 2z_f}$, $I_{p(f)}^2 = -I_{p(f)}^1$,

$$I_{p(f)}^0 = 0.$$

La transformación inversa nos daría las componentes $I_{p(f)}^{abc}$.

FALLA DE DOBLE LÍNEA A TIERRA.

El modelo de la falla se implementa como se muestra a continuación

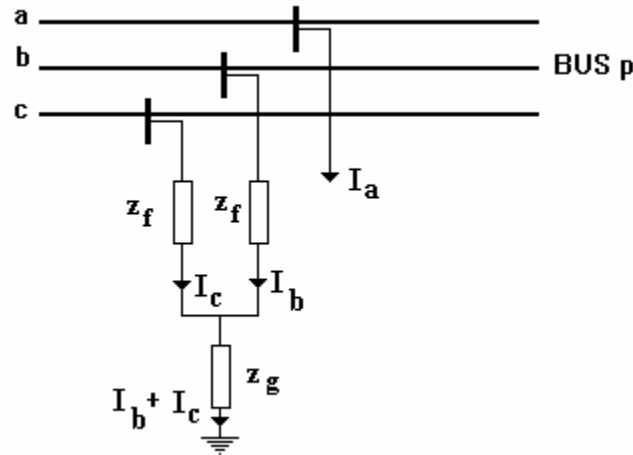


Figura 3.21. Falla de doble línea a tierra.

Las condiciones en el punto de falla son $I_a = 0$, y si aplicamos LVK en la trayectoria formada por las terminales de las fases b , c y tierra, obtenemos la siguiente ecuación:

para la fase b : $V_b - z_f I_b - z_g (I_b + I_c) = 0$

para la fase c : $V_c - z_f I_c - z_g (I_b + I_c) = 0$

despejando los voltajes obtenemos

$$V_b = (z_f + z_g)I_b + z_g I_c$$

$$V_c = (z_f + z_g)I_c + z_g I_b$$

Haciendo la resta de la ecuación para V_b menos la ecuación para V_c , obtenemos después de simplificar

$$V_b - V_c = z_f (I_b - I_c) \quad (3.46)$$

Además

$$I_a = 0 = I_0 + I_1 + I_2 \quad (3.47)$$

Por otro lado tenemos que

$$I_b - I_c = (\alpha^2 - \alpha)I_1 - (\alpha^2 - \alpha)I_2$$

y

$$V_b - V_c = (\alpha^2 - \alpha)V_1 - (\alpha^2 - \alpha)V_2$$

Sustituyendo en (4.7)

$$(\alpha^2 - \alpha)V_1 - (\alpha^2 - \alpha)V_2 = z_f[(\alpha^2 - \alpha)I_1 - (\alpha^2 - \alpha)I_2]$$

de donde

$$V_1 - V_2 = z_f(I_1 - I_2) \quad (3.48)$$

Finalmente

$$V_1 - z_f I_1 = V_2 - z_f I_2 \quad (3.49)$$

Esta última ecuación nos dice que las redes de secuencia positiva y negativa se conectan en paralelo a través de impedancias z_f , de tal forma que se cumpla LVK. Sin embargo, esta misma ecuación no concluye nada acerca de la red de secuencia cero, por lo que debemos buscar alguna expresión que relacione dicha red, con la red de secuencia positiva y/o negativa.

De las ecuaciones obtenidas inicialmente para V_b y V_c tenemos que

$$V_b + V_c = (I_b + I_c)(z_f + 2z_g) \quad (3.50)$$

Además por definición, recordamos que $V_b = V_0 + \alpha^2 V_1 + \alpha V_2$ y $V_c = V_0 + \alpha V_1 + \alpha^2 V_2$ de donde sumando estas dos últimas ecuaciones encontramos que

$$V_b + V_c = 2V_0 - (V_1 + V_2) \quad (3.51)$$

y de manera similar

$$I_b + I_c = 2I_0 - (I_1 + I_2) \quad (3.52).$$

Sustituyendo (3.51) y (3.52) en (3.50)

$$2V_0 - (V_1 + V_2) = [2I_0 - (I_1 + I_2)](z_f + 2z_g) = 2I_0(z_f + 2z_g) - (I_1 + I_2)(z_f + 2z_g),$$

Sumando en ambos lados el término $-2z_g I_0$ obtenemos, después de factorizar

$$2V_0 - 2I_0(z_f + 3z_g) = (V_1 - z_f I_1) + (V_2 - z_f I_2) - 2z_g(I_1 + I_2 + I_0)$$

el último término del lado derecho se elimina, dado que $I_1 + I_2 + I_0 = I_a = 0$, y como habíamos obtenido de (3.49) $V_1 - z_f I_1 = V_2 - z_f I_2$, obtenemos finalmente sustituyendo estas dos últimas ecuaciones

$$V_0 - (z_f + 3z_g)I_0 = V_1 - z_f I_1 \quad (3.53).$$

La ecuación anterior sugiere que la relación entre la red de secuencia positiva y cero es tal que se cumpla (3.53), aplicando LVK a dicha ecuación.

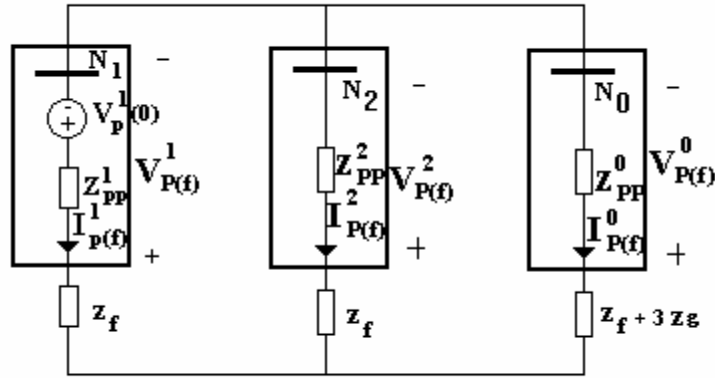


Figura 3.22. Modelo de la falla de doble línea a tierra.

Del diagrama de conexión de las redes de secuencia obtenemos

$$I_{p(f)}^1 = \frac{V_{p(0)}^1}{(Z_{pp}^1 + z_f) + \frac{(Z_{pp}^2 + z_f)(Z_{pp}^0 + z_f + 3z_g)}{Z_{pp}^0 + Z_{pp}^2 + 2z_f + 3z_g}}$$

y usando divisor de corrientes

$$I_{p(f)}^2 = -I_{p(f)}^1 \left(\frac{Z_{pp}^0 + z_f + 3z_g}{Z_{pp}^0 + Z_{pp}^2 + 2z_f + 3z_g} \right)$$

y por el mismo procedimiento

$$I_{p(f)}^0 = -I_{p(f)}^1 \left(\frac{Z_{pp}^2 + z_f}{Z_{pp}^0 + Z_{pp}^2 + 2z_f + 3z_g} \right)$$

de donde podemos obtener $I^{abc} = T_s I^{012}$.

3.4. FORMULACIONE DE FALLAS GENERALIZADAS.

ESTUDIO DE CORTO CIRCUITO EN GRANDES SISTEMAS DE POTENCIA.

Formularemos el problema en el marco de referencia nodal, usando la matriz Z_{bus} .

El esquema general parte de la idea de que tenemos representado el sistema de potencia por su Z_{bus}^{abc} y, si denotamos al bus p como aquel en el que ocurre la falla, este

bus se conecta a referencia a través de una matriz de falla Z_F^{abc} . Lo anterior se representa esquemáticamente por la figura 4.11.

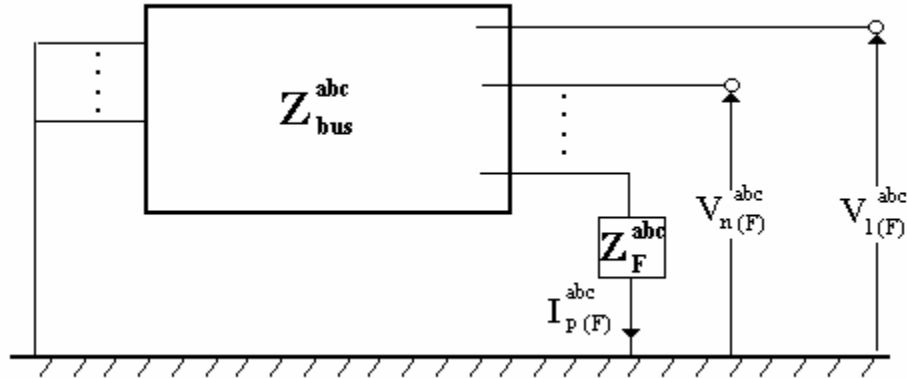


Figura 3.23. Sistema de potencia trifásico.

Por supuesto que el planteamiento anterior también es válido en el dominio de las componentes simétricas; esto se verá más adelante.

La ecuación de partida en el planteamiento nodal, para un sistema de potencia con el bus p fallado será:

$$V_{bus(F)}^{abc} = V_{bus(0)}^{abc} - Z_{bus}^{abc} I_{bus(F)}^{abc} \quad (3.54)$$

$V_{bus(F)}^{abc}$ es el vector de voltajes de bus de postfalla

$$V_{bus(F)}^{abc} = \begin{pmatrix} V_{1(F)}^{abc} \\ V_{2(F)}^{abc} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ V_{n(F)}^{abc} \end{pmatrix}$$

$V_{bus(0)}^{abc}$ es el vector de voltajes de prefalla, ó sea voltajes de bus en condiciones normales de operación (voltajes en circuito abierto si se desprecian condiciones de prefalla)

$$V_{bus(0)}^{abc} = \begin{pmatrix} V_{1(0)}^{abc} \\ V_{2(0)}^{abc} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ V_{n(0)}^{abc} \end{pmatrix}$$

y el vector de corrientes de bus cuando ocurre falla en el bus p

$$\mathbf{I}_{\text{bus}(F)}^{abc} = \mathbf{I}_{P(F)}^{abc} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es importante notar que los vectores antes descritos son de orden $(3n \times 1)$, y cada elemento de dichos vectores es un subvector de orden (3×1) , que contiene los valores asociados con la fase a , b y c , respectivamente.

La matriz de impedancias de bus (nodal) trifásica, con tierra como referencia, será:

$$\mathbf{Z}_{\text{bus}}^{abc} = \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_{11}^{abc} & \mathbf{Z}_{12}^{abc} & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{Z}_{1p}^{abc} & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{Z}_{1n}^{abc} \\ \mathbf{Z}_{21}^{abc} & \mathbf{Z}_{22}^{abc} & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{Z}_{2p}^{abc} & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{Z}_{2n}^{abc} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathbf{Z}_{p1}^{abc} & \mathbf{Z}_{p2}^{abc} & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{Z}_{pp}^{abc} & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{Z}_{pn}^{abc} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathbf{Z}_{n1}^{abc} & \mathbf{Z}_{n2}^{abc} & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{Z}_{np}^{abc} & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{Z}_{nn}^{abc} \end{pmatrix}$$

En este caso, cada elemento de $\mathbf{Z}_{\text{bus}}^{abc}$ es una matriz de (3×3) .

Sustituyendo las consideraciones anteriores en (3.54) obtenemos:

$$\begin{pmatrix} V_{1(F)}^{abc} \\ V_{2(F)}^{abc} \\ \vdots \\ V_{p(F)}^{abc} \\ \vdots \\ V_{n(F)}^{abc} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{1(0)}^{abc} \\ V_{2(0)}^{abc} \\ \vdots \\ V_{p(0)}^{abc} \\ \vdots \\ V_{n(0)}^{abc} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} Z_{11}^{abc} & \cdot & \cdot & \cdot & Z_{1p}^{abc} & \cdot & \cdot & Z_{1n}^{abc} \\ Z_{21}^{abc} & \cdot & \cdot & \cdot & Z_{2p}^{abc} & \cdot & \cdot & Z_{2n}^{abc} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ Z_{p1}^{abc} & \cdot & \cdot & \cdot & Z_{pp}^{abc} & \cdot & \cdot & Z_{pn}^{abc} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ Z_{n1}^{abc} & \cdot & \cdot & \cdot & Z_{np}^{abc} & \cdot & \cdot & Z_{nn}^{abc} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ I_{p(F)}^{abc} \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}$$

Desarrollando la ecuación matricial anterior tendremos:

$$V_{1(F)}^{abc} = V_{1(0)}^{abc} - Z_{1p}^{abc} I_{p(F)}^{abc}$$

$$V_{2(F)}^{abc} = V_{2(0)}^{abc} - Z_{2p}^{abc} I_{p(F)}^{abc}$$

.

.

.

$$V_{p(F)}^{abc} = V_{p(0)}^{abc} - Z_{2p}^{abc} I_{p(F)}^{abc} \quad (3.55)$$

.

$$V_{n(F)}^{abc} = V_{n(0)}^{abc} - Z_{np}^{abc} I_{p(F)}^{abc}$$

Ahora bien, para falla en el bus p, el vector de voltajes trifásicos será:

$$V_{p(F)}^{abc} = Z_F^{abc} I_{p(F)}^{abc} \quad (3.56)$$

donde Z_F^{abc} es la matriz de falla en forma de impedancia de orden (3x3), cuya estructura para cada tipo de falla se obtendrá más adelante. La ecuación (3.56) es la relación de voltaje-corriente en el bus p, "visto" desde éste hacia la falla, mientras que la p -ésima ecuación de (3.55), sería la relación voltaje-corriente "vista" desde el bus p hacia la red que representa el sistema de potencia. En ambos casos, $V_{p(F)}^{abc}$ se refiere al mismo vector de voltajes trifásicos y por tanto podemos igualar ambas ecuaciones para obtener:

$$Z_F^{abc} I_{p(F)}^{abc} = V_{p(0)}^{abc} - Z_{pp}^{abc} I_{p(F)}^{abc}$$

esto es,

$$Z_F^{abc} I_{p(F)}^{abc} + Z_{pp}^{abc} I_{p(F)}^{abc} = V_{p(0)}^{abc}$$

$$(Z_F^{abc} + Z_{pp}^{abc}) I_{p(F)}^{abc} = V_{p(0)}^{abc}$$

De las ecuaciones anteriores obtenemos finalmente

$$I_{p(F)}^{abc} = (Z_F^{abc} + Z_{pp}^{abc})^{-1} V_{p(0)}^{abc} \quad (3.57)$$

Además

$$V_{p(F)}^{abc} = Z_F^{abc} I_{p(F)}^{abc} = Z_F^{abc} (Z_F^{abc} + Z_{pp}^{abc})^{-1} V_{p(0)}^{abc} \quad (3.58).$$

De forma similar, para buses $i \neq p$ tendremos

$$V_{i(F)}^{abc} = V_{i(0)}^{abc} - Z_{ip}^{abc} I_{p(F)}^{abc} \quad i = 1, \dots, n \quad i \neq p \quad (3.59)$$

Si sustituimos (3.57) en esta última ecuación obtenemos

$$V_{i(F)}^{abc} = V_{i(0)}^{abc} - Z_{ip}^{abc} (Z_F^{abc} + Z_{pp}^{abc})^{-1} V_{p(0)}^{abc} \quad (3.60).$$

Sin embargo, existen casos, como se verá más adelante, en que Z_F^{abc} no está definida y/o es más conveniente usar la matriz de falla en forma de admitancia, Y_F^{abc} , y en este caso es importante desarrollar alternativamente ecuaciones para corrientes y voltajes de falla usando la matriz de falla en forma de admitancia.

Nuevamente si p es el bus fallado

$$I_{p(F)}^{abc} = Y_F^{abc} V_{p(F)}^{abc} \quad (3.61)$$

Entonces, tomando la p -ésima ecuación de voltaje de (4.2)

$$V_{p(F)}^{abc} = V_{p(0)}^{abc} - Z_{pp}^{abc} I_{p(F)}^{abc}$$

Sustituyendo (4.22) en esta última ecuación obtenemos

$$V_{p(F)}^{abc} = V_{p(0)}^{abc} - Z_{pp}^{abc} Y_F^{abc} V_{p(F)}^{abc}$$

ó bien,

$$\mathbf{V}_{p(F)}^{abc} + \mathbf{Z}_{pp}^{abc} \mathbf{Y}_F^{abc} \mathbf{V}_{p(F)}^{abc} = \mathbf{V}_{p(0)}^{abc}$$

de donde obtenemos finalmente

$$\mathbf{V}_{p(F)}^{abc} = \left(\mathbf{U} + \mathbf{Z}_{pp}^{abc} \mathbf{Y}_F^{abc} \right)^{-1} \mathbf{V}_{p(0)}^{abc} \quad (3.62).$$

Sin embargo

$$\mathbf{I}_{p(F)}^{abc} = \mathbf{Y}_F^{abc} \mathbf{V}_{p(F)}^{abc}$$

y por tanto

$$\mathbf{I}_{p(F)}^{abc} = \mathbf{Y}_F^{abc} \left(\mathbf{U} + \mathbf{Z}_{pp}^{abc} \mathbf{Y}_F^{abc} \right)^{-1} \mathbf{V}_{p(0)}^{abc} \quad (3.65).$$

De manera similar, para los voltajes en buses distintos al bus fallado p , tenemos

$$\mathbf{V}_{i(F)}^{abc} = \mathbf{V}_{i(0)}^{abc} - \mathbf{Z}_{ip}^{abc} \mathbf{I}_{p(F)}^{abc}$$

Sustituyendo (3.65)

$$\mathbf{V}_{i(F)}^{abc} = \mathbf{V}_{i(0)}^{abc} - \mathbf{Z}_{ip}^{abc} \mathbf{Y}_F^{abc} \left(\mathbf{U} + \mathbf{Z}_{pp}^{abc} \mathbf{Y}_F^{abc} \right)^{-1} \mathbf{V}_{p(0)}^{abc} \quad (3.66)$$

$$i = 1, \dots, n \quad i \neq p.$$

Para calcular la corriente de falla fluyendo en cualquier elemento $(i-j)$ del sistema de potencia, que denotamos $\mathbf{i}_{ij(F)}^{abc}$, una vez obtenidos los voltajes en los buses correspondientes cuando el bus p es el fallado, usamos la ecuación

$$\mathbf{i}_{ij(F)}^{abc} = \mathbf{Y}_{ij\rho\sigma}^{abc} \left[\mathbf{V}_{\rho(F)}^{abc} - \mathbf{V}_{\sigma(F)}^{abc} \right] \quad (3.67)$$

donde $\mathbf{V}_{\rho(F)}^{abc}$ y $\mathbf{V}_{\sigma(F)}^{abc}$ son los voltajes de bus cuando ocurre falla en el bus p , correspondientes a los buses ρ y σ , respectivamente, y la matriz $\mathbf{Y}_{ij\rho\sigma}^{abc}$ es el elemento trifásico de la matriz primitiva de admitancias,

$$\mathbf{Y}_{ij\rho\sigma}^{abc} = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_{ij\rho\sigma}^{aa} & \mathbf{y}_{ij\rho\sigma}^{ab} & \mathbf{y}_{ij\rho\sigma}^{ac} \\ \mathbf{y}_{ij\rho\sigma}^{ba} & \mathbf{y}_{ij\rho\sigma}^{bb} & \mathbf{y}_{ij\rho\sigma}^{bc} \\ \mathbf{y}_{ij\rho\sigma}^{ca} & \mathbf{y}_{ij\rho\sigma}^{cb} & \mathbf{y}_{ij\rho\sigma}^{cc} \end{pmatrix}$$

donde $y_{ij\rho\sigma}^{abc}$ es la admitancia mutua entre la fase a del elemento i - j y la fase b del elemento ρ - σ , etc. Además, $\rho\sigma$ es el elemento ij , así como los elementos mutuamente acoplados a ij .

TRANSFORMACION A COMPONENTES SIMETRICAS.

Las ecuaciones anteriores, desarrolladas en el dominio de fases, pueden formularse en el dominio de las componentes simétricas.

Empezamos estableciendo la relación fundamental para llevar a cabo dicha transformación:

$$Z_{\text{comp}}^{012} = T_S^{-1} Z_{\text{fase}}^{abc} T_S$$

T_S es la matriz de componentes simétricas.

Usando la relación anterior podemos transformar la *matriz primitiva de impedancias* z_{pq}^{abc} , que se convierte en z_{pq}^{012} ,

$$z_{pq}^{012} = T_S^{-1} z_{pq}^{abc} T_S = \begin{pmatrix} z_{pq}^0 & & \\ & z_{pq}^1 & \\ & & z_{pq}^2 \end{pmatrix}$$

Para un elemento trifásico estacionario $z_{pq}^1 = z_{pq}^2$; y para elementos rotatorios se supone la misma relación, aunque esto no sea estrictamente cierto. De manera similar, cualquier elemento $y_{ij\rho\sigma}^{abc}$ de la red primitiva se transforma a un elemento diagonal

$$y_{ij\rho\sigma}^{012} = T_S^{-1} y_{ij\rho\sigma}^{abc} T_S = \begin{pmatrix} y_{ij\rho\sigma}^0 & & \\ & y_{ij\rho\sigma}^1 & \\ & & y_{ij\rho\sigma}^2 \end{pmatrix}$$

De manera similar, cada elemento Z_{ij}^{abc} de la matriz de impedancias de bus (nodal) puede diagonalizarse. La matriz de impedancia de falla Z_F^{abc} se transforma a Z_F^{012} . Sin embargo Z_F^{012} será diagonal únicamente en el caso de falla desbalanceada. Lo mismo es cierto para Y_F^{abc} .

Si suponemos condiciones de prefalla nulas y los voltajes de 1 pu en magnitud, entonces tomado $V_{i(0)}^a = 1\angle 0^\circ$, tenemos

$$\mathbf{V}_{i(0)}^{abc} = \begin{pmatrix} \mathbf{V}_{i(0)}^a \\ \mathbf{V}_{i(0)}^b \\ \mathbf{V}_{i(0)}^c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{pmatrix}, \text{ y dado que: } \mathbf{V}_{i(0)}^{012} = \mathbf{T}_S^{-1} \mathbf{V}_{i(0)}^{abc} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ para } i=1,2,\dots,n.$$

De esta manera, podemos escribir las ecuaciones que habíamos obtenido en el dominio de fase, en el dominio de las componentes simétricas. Dichas ecuaciones, para falla en el bus p , serán

$$\mathbf{I}_{p(F)}^{012} = \left[\mathbf{Z}_F^{012} + \mathbf{Z}_{pp}^{012} \right]^{-1} \mathbf{V}_{p(0)}^{012}$$

$$\mathbf{I}_{p(F)}^{012} = \mathbf{Y}_F^{012} \left[\mathbf{U} + \mathbf{Z}_{pp}^{012} \mathbf{Y}_F^{012} \right]^{-1} \mathbf{V}_{p(0)}^{012} \quad (3.68)$$

$$\mathbf{V}_{p(F)}^{012} = \mathbf{Z}_F^{012} \left[\mathbf{Z}_F^{012} + \mathbf{Z}_{pp}^{012} \right]^{-1} \mathbf{V}_{p(0)}^{012}$$

$$\mathbf{V}_{p(F)}^{012} = \left[\mathbf{U} + \mathbf{Z}_{pp}^{012} \mathbf{Y}_F^{012} \right]^{-1} \mathbf{V}_{p(0)}^{012}.$$

Para buses diferentes del bus fallado, p , tenemos

$$\mathbf{V}_{i(F)}^{012} = \mathbf{V}_{i(0)}^{012} - \mathbf{Z}_{ip}^{012} \left[\mathbf{Z}_F^{012} + \mathbf{Z}_{pp}^{012} \right]^{-1} \mathbf{V}_{p(0)}^{012} \quad (3.69)$$

$$\mathbf{V}_{i(F)}^{012} = \mathbf{V}_{i(0)}^{012} - \mathbf{Z}_{ip}^{012} \mathbf{Y}_F^{012} \left[\mathbf{U} + \mathbf{Z}_{pp}^{012} \mathbf{Y}_F^{012} \right]^{-1} \mathbf{V}_{p(0)}^{012}$$

para $i = 1, 2, \dots, n \quad i \neq p$

La corriente de falla en el elemento trifásico i - j será

$$\mathbf{i}_{ij(F)}^{012} = \mathbf{Y}_{ij\rho\sigma}^{012} \left[\mathbf{V}_{\rho(F)}^{012} - \mathbf{V}_{\sigma(F)}^{012} \right] \quad (3.70).$$

DETERMINACION DE LAS MATRICES DE FALLA .

A continuación mostramos la obtención de las matrices de falla tanto en su forma de impedancia z_f , así como en su forma de admitancia y_f . Primero obtenemos dichas matrices en el dominio de fases y después se obtienen en el dominio de componentes simétricas, mediante la transformación correspondiente. Además empezaremos considerando las fallas a través de una impedancia de falla (ó admitancia de falla).

FALLA TRIFASICA A TIERRA.

La configuración de la falla trifásica a tierra se lleva a cabo a través del circuito siguiente

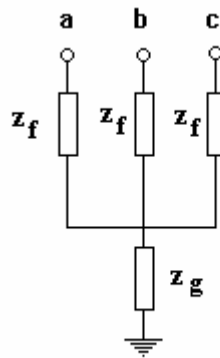


Figura 3.24. Falla trifásica general.

La matriz Z_F^{abc} para el circuito mostrado se obtiene por medio de la prueba en circuito abierto; para ello considere el circuito que se muestra, en el cual se inyecta una corriente de 1 pu a la fase a , con las demás terminales en circuito abierto y se calculan los voltajes en las fases, con lo cual obtenemos los elementos de Z_F^{abc} como el cociente de dicha inyección de corriente y los voltajes medidos, es decir $\frac{V_{fase}}{I_a}$, como se muestra en la figura siguiente

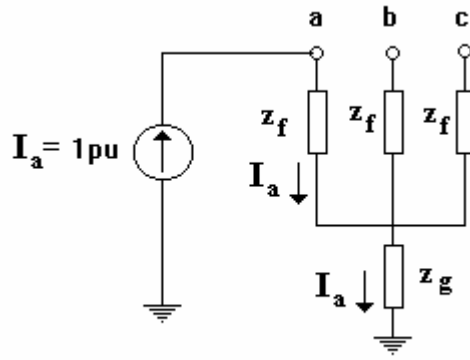


Figura 3.25. Obtención de matriz de falla trifásica.

En el caso mostrado $V_a = (z_g + z_f)I_a$, con $I_a = 1$ pu, entonces

$$z_f^{aa} = \frac{V_a}{I_a} = z_f + z_g = z_F^{bb} = z_F^{cc}.$$

La parte última de la igualdad anterior puede comprobarse fácilmente, si se repite el experimento inyectando 1 pu de corriente en las terminales b y c . Para los elementos fuera de la diagonal z_F^{ab} y z_F^{ac} se calculan los voltajes en circuito abierto en las fases b y c , cuando se inyecta 1 pu de corriente en la fase a ; en referencia a la figura anterior vemos que

$$V_b = z_g I_a = z_g = V_c$$

de donde

$$z_F^{ab} = z_F^{ac} = \frac{V_b}{I_a} = z_g$$

Además $z_F^{ab} = z_F^{bc} = z_F^{ca} = z_F^{cb}$, de donde obtenemos

$$Z_F^{abc} = \begin{pmatrix} z_f + z_g & z_g & z_g \\ z_g & z_f + z_g & z_g \\ z_g & z_g & z_f + z_g \end{pmatrix}$$

y por transformación : $Z_F^{012} = T_S^{-1} Z_F^{abc} T_S$

$$Z_F^{012} = \begin{pmatrix} z_f + 3z_g & 0 & 0 \\ 0 & z_f & 0 \\ 0 & 0 & z_f \end{pmatrix}.$$

Recordando que $\mathbf{I}_{p(F)}^{012} = (\mathbf{Z}_F^{012} + \mathbf{Z}_{pp}^{012})^{-1} \mathbf{V}_{p(0)}^{012}$, tenemos para este caso

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I}_{p(F)}^0 \\ \mathbf{I}_{p(F)}^1 \\ \mathbf{I}_{p(F)}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{z}_f + 3\mathbf{z}_g + \mathbf{Z}_{pp}^0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{z}_f + \mathbf{Z}_{pp}^1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{z}_f + \mathbf{Z}_{pp}^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es importante observar en relación con esta última ecuación, que se usa la forma ortonormal por la matriz de transformación $\mathbf{T}_s$. Si suponemos, como es lo usual $\mathbf{Z}_{pp}^1 = \mathbf{Z}_{pp}^2$,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I}_{p(F)}^0 \\ \mathbf{I}_{p(F)}^1 \\ \mathbf{I}_{p(F)}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{\mathbf{z}_f + \mathbf{Z}_{pp}^1} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Para los voltajes en el bus fallado, p, tenemos $\mathbf{V}_{p(F)}^{012} = \mathbf{z}_F^{012} \mathbf{I}_{p(F)}^{012}$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_{p(F)}^0 \\ \mathbf{V}_{p(F)}^1 \\ \mathbf{V}_{p(F)}^2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{z}_f + 3\mathbf{z}_g & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{z}_f & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{z}_f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{\mathbf{z}_f + \mathbf{Z}_{pp}^1} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{3}\mathbf{z}_f}{\mathbf{z}_f + \mathbf{Z}_{pp}^1} \\ 0 \end{pmatrix},$$

y los voltajes en otro bus distinto al fallado, se obtienen a partir de

$$\mathbf{V}_{i(F)}^{012} = \mathbf{V}_{i(0)}^{012} - \mathbf{Z}_{ip}^{012} \mathbf{Y}_F^{012} [\mathbf{U} + \mathbf{Z}_{pp}^{012} \mathbf{Y}_F^{012}]^{-1} \mathbf{V}_{p(0)}^{012} = \mathbf{V}_{i(0)}^{012} - \mathbf{Z}_{ip}^{012} \mathbf{I}_{p(F)}^{012}$$

recordemos que $\mathbf{I}_{p(F)}^{012} = \mathbf{Y}_F^{012} [\mathbf{U} + \mathbf{Z}_{pp}^{012} \mathbf{Y}_F^{012}]^{-1} \mathbf{V}_{p(0)}^{012}$, con lo que sustituyendo en esta expresión el valor de $\mathbf{I}_{p(F)}^{012}$ obtenemos

$$\begin{pmatrix} \mathbf{V}_{i(F)}^0 \\ \mathbf{V}_{i(F)}^1 \\ \mathbf{V}_{i(F)}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_{ip}^0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{Z}_{ip}^1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{Z}_{ip}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{\mathbf{z}_f + \mathbf{Z}_{pp}^1} \\ 0 \end{pmatrix} = \sqrt{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 - \frac{\mathbf{Z}_{ip}^1}{\mathbf{z}_f + \mathbf{Z}_{pp}^1} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En el cálculo de las corrientes de falla en los elementos de la red, tomamos en consideración que $y_{ij\rho\sigma}^1 = 0$, excepto para el elemento $\rho\sigma = ij$. La corriente de falla en cualquier elemento $i-j$ será

$$\begin{pmatrix} i_{ij(F)}^0 \\ i_{ij(F)}^1 \\ i_{ij(F)}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y_{ij,ij}^1 (V_{i(F)}^1 - V_{j(F)}^1) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

FALLA DE LINEA A LINEA A TRAVES DE IMPEDANCIA.

Consideremos que esta falla ocurre en las fases b y c de un bus p , como se muestra en la figura 3.26.

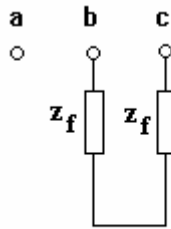


Figura 3.26. Falla de línea a línea general.

Vemos claramente que en este caso Z_F^{abc} es indefinida. Sin embargo, Y_F^{abc} no lo es, y sus elementos se calculan usando la prueba de corto circuito, esto es, se excita una terminal con una fuente de voltaje, de 1 pu para simplificar las cosas, y se ponen en corto circuito las terminales restantes, calculándose las corrientes en las terminales correspondientes. El cociente de dichas corrientes al voltaje que se utiliza para excitar la red, nos da la admitancia nodal correspondiente.

Consideremos a la figura 3.27

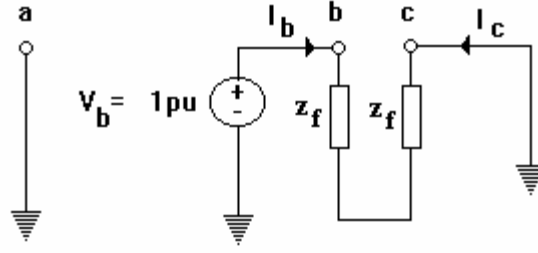


Figura 3.27. Obtención de matriz de falla de L-L.

Para calcular $y_F^{bb} = \frac{I_b}{V_b}$, vemos que $V_b = 2z_f I_b$, de donde tendremos

$$y_F^{bb} = \frac{I_b}{V_b} = \frac{1}{2z_f} = \frac{y_f}{2} = y_F^{cc}$$

Aquí por supuesto que $y_f = 1/z_f$.

De manera similar se puede mostrar que $y_F^{aa} = 0$. Sin embargo para calcular los elementos fuera de la diagonal, digamos y_F^{bc} , se conecta una fuente de voltaje de 1 pu en la terminal de la fase b y calculamos la corriente en la terminal de la fase c , la cual es la misma que la mostrada arriba, pero debe llevar signo negativo debido a que sale del nodo (y se trata de una corriente nodal como debemos recordar). Con esto obtenemos

$$y_F^{bc} = \frac{I_c}{V_b} = \frac{-I_c}{V_b} = -\frac{y_f}{2} = y_F^{cb}.$$

Además se puede demostrar, usando la misma técnica, que $y_F^{ab} = y_F^{ac} = 0$. Por lo tanto, sintetizando los resultados arriba discutidos, la matriz de falla en su forma de admitancia resulta

$$Y_F^{abc} = (y_f/2) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Efectuando la transformación $Y_F^{012} = T_S^{-1} Y_F^{abc} T_S$ obtenemos

$$Y_F^{012} = (y_f/2) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La corriente de falla en el dominio de componentes simétricas es

$$\mathbf{I}_{p(F)}^{012} = \mathbf{Y}_F^{012} \left[\mathbf{U} + \mathbf{Z}_{pp}^{012} \mathbf{Y}_F^{012} \right]^{-1} \mathbf{V}_{p(0)}^{012}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I}_{p(F)}^0 \\ \mathbf{I}_{p(F)}^1 \\ \mathbf{I}_{p(F)}^2 \end{pmatrix} = \frac{y_f}{3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \mathbf{Z}_{pp}^1 \frac{y_f}{2} & -\mathbf{Z}_{pp}^1 \frac{y_f}{2} \\ 0 & -\mathbf{Z}_{pp}^1 \frac{y_f}{2} & 1 + \mathbf{Z}_{pp}^1 \frac{y_f}{2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Además los voltajes de falla en el bus p están dados por

$$\begin{pmatrix} \mathbf{V}_{p(F)}^0 \\ \mathbf{V}_{p(F)}^1 \\ \mathbf{V}_{p(F)}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \mathbf{Z}_{pp}^1 \frac{y_f}{2} & -\mathbf{Z}_{pp}^1 \frac{y_f}{2} \\ 0 & -\mathbf{Z}_{pp}^1 \frac{y_f}{2} & 1 + \mathbf{Z}_{pp}^1 \frac{y_f}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

y para cualquier bus $i \neq p$ $\mathbf{V}_{i(F)}^{012} = \mathbf{V}_{i(0)}^{012} - \mathbf{Z}_{ip}^{012} \mathbf{I}_{p(F)}^{012}$, lo que resulta en

$$\begin{pmatrix} \mathbf{V}_{i(F)}^0 \\ \mathbf{V}_{i(F)}^1 \\ \mathbf{V}_{i(F)}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_{ip}^0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{Z}_{ip}^1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{Z}_{ip}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{p(F)}^0 \\ \mathbf{I}_{p(F)}^1 \\ \mathbf{I}_{p(F)}^2 \end{pmatrix}$$

FALLA DE DOBLE LÍNEA A TIERRA.

La falla de doble línea a tierra en el bus p, se modela conectando las fases *b* y *c* a través de impedancias de falla y a tierra a través de una impedancia z_g , como se muestra a continuación, en la figura 3.28

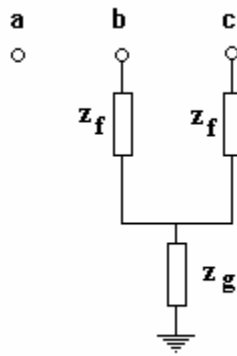


Figura 3.28. Falla de doble línea a tierra.

Si aplicamos el método de prueba en circuito abierto, vemos que $z_F^{aa} = \infty$, dado que la corriente inyectada en la terminal a sería cero. Sin embargo, para obtener z_F^{bb} aplicamos una fuente de corriente unitaria a la fase b y calculamos sus voltajes, mientras que se mantienen en circuito abierto las demás fases.

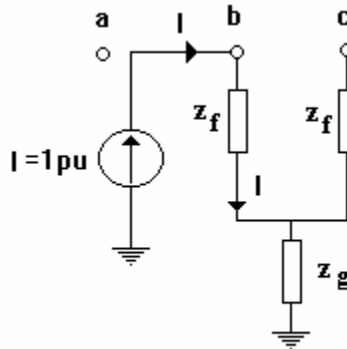


Figura 3.29. Obtención de la matriz de falla doble línea a tierra.

Se observa que $V_b = (z_f + z_g)I = z_f + z_g = z_F^{bb} = z_F^{cc}$. Los elementos fuera de la diagonal resultan $z_F^{ab} = z_F^{ac} = 0$, si aplicamos 1 pu a la terminal a .

Para los elementos fuera de la diagonal z_F^{bc} usamos el mismo circuito mostrado arriba y $z_F^{bc} = \frac{V_c}{I} = V_c = z_g I = z_g$.

Resumiendo, la matriz de falla para este tipo de falla (2L-T) en el dominio de fases resulta

$$Z_F^{abc} = \begin{pmatrix} \infty & 0 & 0 \\ 0 & z_f + z_g & z_g \\ 0 & z_g & z_f + z_g \end{pmatrix}$$

y por inversión obtenemos

$$Y_F^{abc} = (Z_F^{abc})^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{z_f + z_g}{k} & -\frac{z_g}{k} \\ 0 & -\frac{z_g}{k} & \frac{z_f + z_g}{k} \end{pmatrix}$$

donde $k = z_f^2 + 2z_f z_g$.

Por transformación obtenemos $Y_F^{012} = T_S^{-1} Y_F^{abc} T_S$

$$Y_F^{012} = \frac{1}{3(z_f^2 + 2z_f z_g)} \begin{pmatrix} 2z_f & -z_f & -z_f \\ -z_f & 2z_f + 3z_g & -(z_f + 3z_g) \\ -z_f & -(z_f + 3z_g) & 2z_f + 3z_g \end{pmatrix}$$

Esta última ecuación puede usarse para obtener la corriente de falla

$$I_{p(F)}^{012} = Y_F^{012} [U + Z_{pp}^{012} Y_F^{012}]^{-1} V_{p(0)}^{012}.$$

Para cualquier bus $i \neq p$, $V_{i(F)}^{012} = V_{p(0)}^{012} - Z_{ip}^{012} I_{p(F)}^{012}$

$$V_{i(F)}^{012} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} - Z_{ip}^{012} I_{p(F)}^{012} \quad \text{donde} \quad V_{p(0)}^{012} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

FALLA DE LINEA A TIERRA.

En este caso suponemos que falla la fase a y modelamos la falla conectando la terminal de dicha fase a tierra, a través de una impedancia z_f , como se muestra a continuación en la figura 3.30

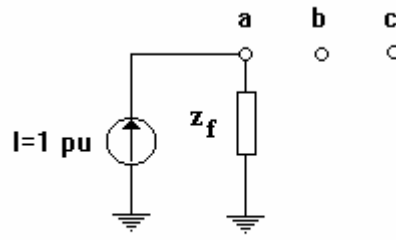


Figura 3.30. Obtención de matriz de falla de línea a tierra.

En la figura 3.30 se muestra una fuente de corriente inyectando 1 pu a la terminal de la fase a , con las fases b y c en circuito abierto, lo cual constituye la aplicación del método que hemos venido utilizando para obtener los elementos de la matriz de impedancias de falla. En este caso $V_a = z_f I = z_f = z_F^{aa}$.

Siguiendo el mismo razonamiento tenemos que $z_F^{bb} = z_F^{cc} = \infty$, mientras que para los elementos fuera de la diagonal tendremos $z_F^{ab} = z_F^{bc} = z_F^{ca} = 0$.

Usando los valores mencionados, obtenemos

$$Z_F^{abc} = \begin{pmatrix} z_f & 0 & 0 \\ 0 & \infty & 0 \\ 0 & 0 & \infty \end{pmatrix}.$$

Por inversión, ó bien por el método de prueba en corto circuito mencionado anteriormente se puede obtener

$$Y_F^{012} = \frac{y_f}{3} \begin{pmatrix} y_f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de donde por transformación $Y_F^{012} = T_S^{-1} Y_F^{abc} T_S$

$$Y_F^{012} = \frac{y_f}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para las corrientes de falla en el bus p, tenemos

$$\begin{pmatrix} I_{p(F)}^0 \\ I_{p(F)}^1 \\ I_{p(F)}^2 \end{pmatrix} = \frac{y_f}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + \frac{y_f}{3} Z_{pp}^0 & \frac{y_f}{3} Z_{pp}^0 & \frac{y_f}{3} Z_{pp}^0 \\ \frac{y_f}{3} Z_{pp}^1 & 1 + \frac{y_f}{3} Z_{pp}^1 & \frac{y_f}{3} Z_{pp}^1 \\ \frac{y_f}{3} Z_{pp}^1 & \frac{y_f}{3} Z_{pp}^1 & 1 + \frac{y_f}{3} Z_{pp}^1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

lo cual se reduce a

$$\begin{pmatrix} I_{p(F)}^0 \\ I_{p(F)}^1 \\ I_{p(F)}^2 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{Z_{pp}^0 + 2Z_{pp}^1 + 3Z_f} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Por otro lado, los voltajes de falla

$$\begin{pmatrix} V_{p(0)}^0 \\ V_{p(0)}^1 \\ V_{p(0)}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + Z_{pp}^0 \frac{y_f}{3} & Z_{pp}^0 \frac{y_f}{3} & Z_{pp}^0 \frac{y_f}{3} \\ Z_{pp}^1 \frac{y_f}{3} & 1 + Z_{pp}^1 \frac{y_f}{3} & Z_{pp}^1 \frac{y_f}{3} \\ Z_{pp}^1 \frac{y_f}{3} & Z_{pp}^1 \frac{y_f}{3} & 1 + Z_{pp}^1 \frac{y_f}{3} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{Z_{pp}^0 + 2Z_{pp}^1 + 3Z_f} \begin{pmatrix} -Z_{pp}^0 \\ Z_{pp}^0 + Z_{pp}^1 + 3Z_f \\ -Z_{pp}^1 \end{pmatrix}$$

mientras que los voltajes en otros buses $i \neq p$

$$\begin{pmatrix} V_{i(F)}^0 \\ V_{i(F)}^1 \\ V_{i(F)}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} Z_{ip}^0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_{ip}^1 & 0 \\ 0 & 0 & Z_{ip}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{p(F)}^0 \\ I_{p(F)}^1 \\ I_{p(F)}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{\sqrt{3}}{Z_{pp}^0 + 2Z_{pp}^1 + 3Z_f} \begin{pmatrix} Z_{ip}^0 \\ Z_{ip}^1 \\ Z_{ip}^2 \end{pmatrix}.$$

FALLA TRIFASICA SIN TIERRA A TRAVES DE IMPEDANCIA.

Esta falla, a diferencia de la otra falla trifásica, no involucra la tierra y se modela como se muestra enseguida, figura 3.31.

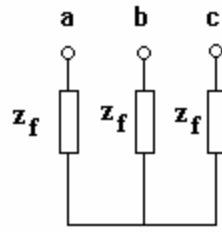


Figura 3.31. Falla trifásica sin tierra a través de impedancia.

Si se utiliza el método de la prueba en circuito abierto se puede verificar que la matriz de falla en su forma de impedancia nodal, Z_F^{abc} , no está definida. Sin embargo la matriz de falla en su forma de admitancia, Y_F^{abc} , sí lo está. Dicha matriz puede obtenerse usando el método de prueba de corto circuito. La figura 3.32 muestra la prueba para obtener el elemento diagonal y_F^{aa} y los elementos fuera de la diagonal y_F^{ab} y y_F^{ac} .

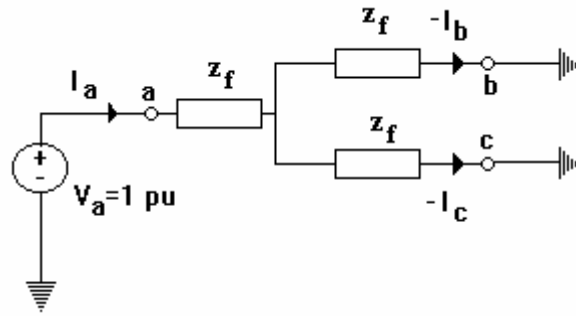


Figura 3.32. Obtención de matriz de falla trifásica flotante general.

y_F^{aa} se obtiene como el cociente de la corriente que produce la fuente de voltaje al voltaje de

dicha fuente ; vemos que $V_a = \left(z_f + \frac{1}{\frac{1}{z_f} + \frac{1}{z_f}} \right) I_a = \frac{3}{2} z_f I_a$, de aquí $I_a / V_a = \frac{2}{3z_f}$, donde

$y_f = 1/z_f$. Entonces $y_F^{aa} = y_F^{bb} = y_F^{cc} = \frac{2}{3} y_f$ dado que $V_a = 1pu$. Los términos y_F^{bb} y y_F^{cc}

que resultan igual a y_F^{aa} , como se menciona arriba, se pueden obtener moviendo la fuente de voltaje de 1 pu, a las terminales b y c respectivamente, manteniendo en corto circuito las otras terminales.

De la figura anterior vemos que $+I_b/V_a = y_F^{ab} = -\frac{1}{3}y_f$. Se puede probar

fácilmente que $y_F^{ab} = y_F^{bc} = y_F^{ac}$, y entonces obtendremos

$$Y_F^{abc} = \frac{y_f}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

y mediante la transformación $T_S^{-1} Y_F^{abc} T_S = Y_F^{012}$

$$Y_F^{012} = y_f \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para el bus fallado p, tenemos $I_{p(F)}^{012} = Y_F^{012} [U + Z_{pp}^{012} Y_F^{012}]^{-1} V_{p(0)}^{012}$

$$\begin{pmatrix} I_{p(F)}^0 \\ I_{p(F)}^1 \\ I_{p(F)}^2 \end{pmatrix} = y_f \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + Z_{pp}^1 y_f & 0 \\ 0 & 0 & 1 + Z_{pp}^1 y_f \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix},$$

también $V_{p(F)}^{012} = [U + Z_{pp}^{012} Y_F^{012}]^{-1} V_{p(F)}^{012}$

$$\begin{pmatrix} V_{p(F)}^0 \\ V_{p(F)}^1 \\ V_{p(F)}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + Z_{pp}^1 y_f & 0 \\ 0 & 0 & 1 + Z_{pp}^1 y_f \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Los voltajes de bus, para cualquier bus $i \neq p$ se obtiene de $V_{i(F)}^{012} = V_{i(0)}^{012} - Z_{ip}^{012} I_{p(F)}^{012}$

$$\begin{pmatrix} V_{i(F)}^0 \\ V_{i(F)}^1 \\ V_{i(F)}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} Z_{ip}^0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_{ip}^1 & 0 \\ 0 & 0 & Z_{ip}^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{p(F)}^0 \\ I_{p(F)}^1 \\ I_{p(F)}^2 \end{pmatrix}.$$

3.5. ANALISIS DE FALLAS POR COMPUTADORA.

El análisis de fallas en la computadora está constituido por una complejidad, que está en relación con las prestaciones que se desean para el programa. En software de uso industrial, la parte de captura de datos y validación, puede, en si misma, constituir una serie de programas complicados, pues en le caso de sistema de gran escala, es imprescindible el uso de base de datos con cierto grado de “inteligencia” del sistema, que se utiliza, no nada más para los estudios de fallas, sino en general de todos los estudios de sistema necesarios.

Por lo que toca a la parte del algoritmo numérico, por así llamarlo, es decir, la parte del cálculo de fallas, realmente no es complicada, pues representa simplemente la programación de la fórmulas obtenidas en la modelación de los distintos tipos de falla, por lo que se decidió integrar en le apéndice la discusión de la conformación de los programas que integran el programa de cálculo de fallas, así como, al mismo tiempo la forma de integrar los datos y la secuencia de ejecución de los programas en MATLAB®, que es el software usado en dichos programas. Además se hace una corrida con un ejemplo de un tamaño adecuado, tal que sea suficientemente grande para contener las características encontradas en la práctica, pero no demasiado grande para no oscurecer con esto la exposición del material innecesariamente.

BIBLIOGRAFIA.

- [1]. G.W. Stagg, A.H. El-Abiad. Computer methods in power system analysis. Mc Graw Hill. (1968).
- [2]. J. Grainger, W.D. Stevenson. Power system analysis. Mc Graw Hill. (1994).
- [3]. O.I. Elgerd. Electric energy systems theory, an introduction. 2nd. Edition. Mc Gaw Hill. (1984).
- [4]. H. Saadat. Power system analysis. Mc Graw Hill. (1999).
- [5]. H.E. Brown. Solution of large networks by matrix methods. Jon Wiley & Sons. (1975).
- [6]. Takahashi, Fagan, Chen. "A sparse bus impedance matrix and its applications", 1973 PICA Conference Proceedings.
- [7]. M. Madrigal, M. Madrigal, L. Coria. A generalized method and extensions for fault analysis in electrical power systems. Proceedings of the 26th annual North American Power Symposium. Manhattan, Kansas 1994.